









Digitized by the Internet Archive  
in 2010 with funding from  
University of Ottawa

<http://www.archive.org/details/s3journaldemat03liou>

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.





JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES ET DU BUREAU DES LONGITUDES,  
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE.

---

TROISIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR H. RESAL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,  
ADJOINT AU COMITÉ D'ARTILLERIE.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS SAVANTS.

---

TOME TROISIÈME. — ANNÉE 1877.

---

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE  
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE  
SUCCESSION DE MALLET-BACHIFLIER,

Quai des Augustins. 57.

1877

GN  
!  
J684  
S.C.E.  
E.3

20798  
e.

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

*Mémoire sur les équations du mouvement d'un système  
de corps;*

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

---

Imaginons un système de corps réduits à des points et supposons d'abord que ces points matériels, au nombre de  $n + 1$ , soient libres et s'attirent ou se repoussent suivant une fonction donnée de la distance. D'après une transformation bien connue, on peut remplacer le mouvement de ces  $n + 1$  points par celui de  $n$  points fictifs également libres, sollicités par une même fonction de forces et pour lequel aient lieu le principe des forces vives et les trois intégrales des aires.

Ayant cherché à appliquer à l'étude de ce mouvement un système de coordonnées analogue à celui qui m'a servi dans le problème des trois corps, je suis ainsi parvenu à traiter cette question d'une manière toute semblable, et j'ai ramené le problème à la résolution de  $6n - 4$  équations différentielles canoniques. On peut remarquer que,

le principe des forces vives étant encore une intégrale pour ces dernières équations, et l'élément du temps pouvant s'éliminer immédiatement, le système des équations différentielles n'est réellement que de l'ordre  $6n - 6$ . Ce résultat a été déjà reconnu par M. Radau dans un Mémoire publié dans ce journal (t. XIV, 2<sup>e</sup> série), et que je n'ai lu qu'après l'entière rédaction du Mémoire actuel.

Ensuite, au lieu d'un système libre, je conçois plus généralement un système de  $n$  points sollicités par une même fonction de forces et soumis à de certaines liaisons; mais je suppose que le principe des forces vives et les trois équations des aires soient encore applicables. Je montre qu'on peut encore adopter le même système de coordonnées, et j'obtiens pour le mouvement un système d'équations différentielles de l'ordre  $6n - 6 - 2r$ , où  $r$  désigne le nombre des équations qui expriment les liaisons.

### *Emploi d'un premier système de variables.*

1. Occupons-nous d'abord du mouvement d'un système de  $n$  corps libres sollicités par une même fonction de forces, et pour lequel le principe des forces vives et les trois intégrales des aires sont applicables.

A chaque instant on peut se représenter les axes principaux d'inertie de ce système, qui passent par l'origine des coordonnées comme si le système était solide, et désignons, sous le nom d'*équateur*, un des trois plans passant par deux des axes principaux d'inertie. La position du système et son déplacement infiniment petit sont déterminés : 1<sup>o</sup> par les projections des rayons vecteurs menés de l'origine aux masses  $m_1, m_2, \dots, m_n$  sur le plan de l'équateur, projections que nous désignerons par  $r_1, r_2, \dots, r_n$ ; 2<sup>o</sup> par les dérivées de  $r_1, r_2, \dots, r_n$  par rapport à  $t$ ; 3<sup>o</sup> par les angles  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  des rayons  $r_1, r_2, \dots$  avec l'intersection L du plan de l'équateur et de la position qu'il occupe au bout de l'instant  $dt$ ; 4<sup>o</sup> par les dérivées de  $\beta_1, \beta_2, \dots$  par rapport à  $t$ ; 5<sup>o</sup> par les distances  $z_1, z_2, \dots, z_n$  de  $m_1, m_2, \dots$  au plan de l'équateur; 6<sup>o</sup> par les dérivées de ces distances par rapport à  $t$ ; 7<sup>o</sup> par le déplacement infiniment petit  $d\lambda$  de l'axe de rotation L du plan de l'équateur



dans ce plan; 8° par la rotation infiniment petite  $\omega dt$  du plan de l'équateur autour de la droite L.

Il est aisé de se représenter le mouvement du plan de l'équateur, que nous représenterons par P. La droite L tourne dans ce plan P autour de l'origine O et vient au bout de l'instant  $dt$  en  $L_1$ , puis ce plan tourne autour de  $L_1$  d'un angle infiniment petit  $\omega dt$  et occupe la position  $P_1$ . La droite L tournera de même dans le plan  $P_1$  autour du point O et ira de la position  $L_1$  à une autre infiniment voisine  $L_2$ , puis le plan  $P_1$  tournera d'un angle infiniment petit autour de  $L_2$ , et ainsi de suite. La droite L se meut donc sur un cône, et comme on peut regarder l'élément plan renfermé entre L et  $L_1$  comme appartenant à la fois au cône et au plan mobile P, on voit que le plan P de l'équateur roule sans glisser autour du cône formé par les positions successives de la droite L.

*Sur une expression de la force vive.*

2. Par l'origine O des coordonnées, menons Oz perpendiculaire au plan P, Ox suivant la droite L et Oy perpendiculaire à Ox dans le plan P. L'axe des z, étant perpendiculaire à l'équateur, est un axe principal d'inertie; et, par suite, en désignant généralement par  $x, y, z$  les coordonnées d'une quelconque des masses représentée par  $m$ , par rapport à ces axes de coordonnées mobiles, on a les deux équations

$$\sum m z x = 0, \quad \sum m z y = 0,$$

le signe sommatoire  $\Sigma$  s'étendant à toutes les masses  $m$ . Comme on a en général

$$x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta,$$

on peut remplacer ces deux équations par

$$\sum m z r \cos \beta = 0, \quad \sum m z r \sin \beta = 0.$$

Si l'on désigne généralement par  $u, v, w$  les vitesses relatives d'un point  $m$  par rapport à trois axes de coordonnées mobiles Ox, Oy, Oz,

et par  $p$ ,  $q$ ,  $r$  les vitesses de rotation de l'angle trièdre des coordonnées autour de ces trois axes, on a les formules connues et faciles à établir

$$u = qz - ry + \frac{dx}{dt},$$

$$v = rx - pz + \frac{dy}{dt},$$

$$w = py - qx + \frac{dz}{dt}.$$

Or, dans le cas actuel, la rotation du plan P autour de L est égale à  $\omega dt$ , et la rotation autour de Oz est égale à  $d\gamma$ ; on a donc

$$p = \omega, \quad q = 0, \quad r = \frac{d\gamma}{dt},$$

et les trois formules précédentes deviennent

$$u = -\frac{d\gamma}{dt} r \sin \beta + \frac{dr}{dt} \cos \beta - r \sin \beta \frac{d\beta}{dt},$$

$$v = \frac{d\gamma}{dt} r \cos \beta - \omega z + \frac{dr}{dt} \sin \beta + r \cos \beta \frac{d\beta}{dt},$$

$$w = \omega r \sin \beta + \frac{dz}{dt}.$$

Désignons par A la vitesse angulaire de  $r$  dans le plan de l'équateur, comptée à partir d'une droite fixe située dans ce plan, en sorte que l'on ait

$$(a) \quad A = \frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt},$$

en supposant A,  $\beta$ ,  $d\gamma$  comptés positivement dans le même sens. Nous aurons

$$u = \frac{dr}{dt} \cos \beta - r A \sin \beta,$$

$$v = \frac{dr}{dt} \sin \beta - \omega z + r A \cos \beta,$$

$$w = \omega r \sin \beta + \frac{dz}{dt}.$$

On en conclut l'expression du carré de la vitesse

$$u^2 + v^2 + w^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \Lambda^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \omega^2 z^2 + \omega^2 r^2 \sin^2 \beta \\ + 2\omega \frac{dz}{dt} r \sin \beta - 2\omega z \frac{dr}{dt} \sin \beta - 2\omega z r \cos \beta \left(\frac{d\beta}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\right),$$

et l'on a, pour l'expression de la force vive du système des masses,

$$2T = \Sigma m \left[ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \Lambda^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] + \omega^2 \Sigma m (z^2 + r^2 \sin^2 \beta) \\ + 2\omega \Sigma m \left( \frac{dz}{dt} r \sin \beta - z \frac{dr}{dt} \sin \beta - z r \cos \beta \frac{d\beta}{dt} \right) \\ - 2\omega \frac{d\gamma}{dt} \Sigma m z r \cos \beta.$$

Or on a

$$(b) \quad \Sigma m z r \cos \beta = 0, \quad \Sigma m z r \sin \beta = 0,$$

et, en différenciant la dernière équation,

$$\Sigma m \left( z \frac{dr}{dt} \sin \beta + z r \cos \beta \frac{d\beta}{dt} \right) = - \Sigma m \frac{dz}{dt} r \sin \beta.$$

Il en résulte la formule

$$(c) \quad \left\{ \begin{aligned} 2T &= \Sigma m \left[ \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \Lambda^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] \\ &+ \omega^2 \Sigma m (z^2 + r^2 \sin^2 \beta) + 4\omega \Sigma m \frac{dz}{dt} r \sin \beta, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle  $\Lambda$  a la valeur (a).

*Rotation instantanée du plan de l'équateur autour de la droite L.*

5. Les projections de l'axe  $k$  du plan invariable, sur  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , sont égales à

$$\Sigma m (\gamma w - z v), \quad \Sigma m (z u - x w), \quad \Sigma m (x v - \gamma u),$$

et, en faisant la somme des carrés de ces trois quantités, nous

aurons le carré de la constante  $k$ . Calculons ces trois quantités; nous aurons

$$\begin{aligned} \Sigma m(\mathcal{Y}w - zv) &= \omega \Sigma m(z^2 + r^2 \sin^2 \beta) \\ &\quad + \Sigma m \left( \frac{dz}{dt} r \sin \beta - z \frac{dr}{dt} \sin \beta - zr \cos \beta \frac{d\beta}{dt} \right), \end{aligned}$$

ou

$$\Sigma m(\mathcal{Y}w - zv) = \omega \Sigma m(z^2 + r^2 \sin^2 \beta) + 2 \Sigma m \frac{dz}{dt} r \sin \beta.$$

En second lieu, nous avons

$$\begin{aligned} \Sigma m(zu - xv) &= -\omega \Sigma m r^2 \sin \beta \cos \beta + \Sigma m z \frac{dr}{dt} \cos \beta \\ &\quad - \Sigma m z r \sin \beta \frac{d\beta}{dt} - \Sigma m \frac{dz}{dt} r \cos \beta - \frac{dr}{dt} \Sigma m z r \sin \beta; \end{aligned}$$

en différenciant la première équation (b), nous avons

$$\Sigma m z \frac{dr}{dt} \cos \beta - \Sigma m z r \sin \beta \frac{d\beta}{dt} = -\Sigma m \frac{dz}{dt} r \cos \beta,$$

et il en résulte

$$\Sigma m(zu - xv) = -\omega \Sigma m r^2 \sin \beta \cos \beta - 2 \Sigma m \frac{dz}{dt} r \cos \beta.$$

Enfin l'on a

$$\Sigma m(xv - yu) = \Sigma m r^2 A - \omega \Sigma m z r \cos \beta = \Sigma m r^2 A.$$

En faisant la somme des carrés de ces trois expressions, on obtient

$$(d) \quad k^2 = G \omega^2 + 4S\omega + 4V + (\Sigma m r^2 A)^2,$$

en posant

$$\begin{aligned} G &= [\Sigma m(z^2 + r^2 \sin^2 \beta)]^2 + (\Sigma m r^2 \sin \beta \cos \beta)^2, \\ S &= \Sigma m \frac{dz}{dt} r \cos \beta \times \Sigma m r^2 \sin \beta \cos \beta \\ &\quad + \Sigma m \frac{dz}{dt} r \sin \beta \times \Sigma m r^2 \sin^2 \beta + \Sigma m \frac{dz}{dt} r \sin \beta \times \Sigma m z^2, \\ V &= \left( \Sigma m \frac{dz}{dt} r \cos \beta \right)^2 + \left( \Sigma m \frac{dz}{dt} r \sin \beta \right)^2. \end{aligned}$$



Les deux dernières expressions peuvent encore s'écrire

$$\begin{aligned}
 S &= \Sigma m z^2 \times \Sigma m \frac{dz}{dt} r \sin \beta + \Sigma m^2 r^3 \frac{dz}{dt} \sin \beta \\
 &\quad + \Sigma m m_1 \left( r^2 r_1 \frac{dz_1}{dt} \sin \beta + r r_1^2 \frac{dz}{dt} \sin \beta_1 \right) \cos (\beta_1 - \beta), \\
 V &= \Sigma m^2 r^2 \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 + 2 \Sigma m m_1 r r_1 \frac{dz}{dt} \frac{dz_1}{dt} \cos (\beta_1 - \beta).
 \end{aligned}$$

De l'équation du second degré (d), on pourra tirer  $\omega$  et le porter dans l'expression (c) de  $2T$ , qui deviendra ainsi une fonction homogène et du second degré des dérivées  $\frac{dz}{dt}$ ,  $\frac{dr}{dt}$  des quantités A et de la quantité k.

*Formule qui donne le mouvement de la trace de l'équateur sur le plan invariable.*

4. Représentons par  $\sigma$  l'angle que fait la trace de l'équateur P sur le plan invariable avec une droite fixe située dans ce dernier plan; puis désignons, comme au n<sup>o</sup> 2, par  $x, y, z$  les coordonnées de chaque masse  $m$  par rapport aux trois axes rectangulaires considérés dans ce numéro, et par  $p, q$  les vitesses de rotation autour de  $Ox, Oy$ . Alors la différentielle de  $\sigma$  est fournie par la formule suivante, que j'ai donnée dans mon *Mémoire sur des formules de perturbation* (voir ce Recueil, 1875, p. 195) :

$$d\sigma = \frac{A p^2 + B q^2 + 2 \Sigma m (p y - q x) \frac{dz}{dt} - 2 p q \Sigma m x y}{k^2 - \mathfrak{A}^2} k dt,$$

où l'on a

$$A = \Sigma m (z^2 + y^2), \quad B = \Sigma m (x^2 + z^2), \quad \mathfrak{A} = \Sigma m (x v - y u).$$

(Dans ce Mémoire, le dernier terme du numérateur de cette formule manque, parce qu'on y a pris pour axes des  $x$  et  $y$  les deux axes principaux situés dans le plan P, ce qui annule la quantité  $\Sigma m x y$ . Mais la démonstration de la formule actuelle se fait absolument comme celle de la formule citée.)

En faisant

$$p = \omega, \quad q = 0, \quad x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta, \quad \omega = \Sigma mr^2 A,$$

on obtient la formule cherchée

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\omega^2 \Sigma m (z^2 + r^2 \sin^2 \beta) + 2\omega \Sigma mr \sin \beta \frac{dz}{dt}}{k^2 - (\Sigma mr^2 A)^2} k.$$

Comme on a trouvé, au numéro précédent,

$$k^2 - (\Sigma mr^2 A)^2 = G \omega^2 + 4S\omega + 4V,$$

on peut aussi écrire cette formule

$$(e) \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\omega^2 \Sigma m (z^2 + r^2 \sin^2 \beta) + 2\omega \Sigma mr \sin \beta \frac{dz}{dt}}{G \omega^2 + 4S\omega + 4V} k.$$

*Remarques sur l'application des équations différentielles  
de la Dynamique.*

§. Si l'on désigne par  $q_1, q_2, \dots, q_s$  les variables qui déterminent la position d'un système de points matériels, si l'on représente par  $U$  la fonction de forces, et si l'on exprime ensuite la force vive  $2T$  au moyen de ces  $s$  variables et de leurs dérivées par rapport à  $t$  représentées par  $q'_1, q'_2, \dots, q'_s$ , alors  $T$  sera une fonction homogène et du second degré de ces dérivées. Posons ensuite

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial T}{\partial q'_s} = p_s,$$

et exprimons  $2T$  en fonction des variables  $q_i, p_i$ , puis faisons

$$T - U = H,$$

et nous aurons le système des  $2s$  équations canoniques

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, & \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \\ & \dots & & \dots \end{aligned}$$

Examinons comment on pourra appliquer ce système d'équations à l'expression de  $2T$  obtenue à la fin du n° 2. Si nous posons en général

$$\frac{dr_i}{dt} = r'_i, \quad \frac{d\beta_i}{dt} = \beta'_i, \quad \frac{dz_i}{dt} = z'_i,$$

cette expression de  $2T$  est une fonction des quantités

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, z_1, z_2, \dots, z_n, \\ r'_1, r'_2, \dots, r'_n, \beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n, z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \frac{d\gamma}{dt}, \omega,$$

et elle est homogène et du second degré par rapport aux quantités de la seconde ligne. On a d'ailleurs les deux équations

$$\sum m z r \cos \beta = 0, \quad \sum m z r \sin \beta = 0,$$

et l'on en déduit deux autres par la différentiation par rapport à  $t$ ; au moyen de ces quatre équations et des deux équations (d) et (e) des n°s 3 et 4, on pourra tirer les six quantités  $z_1, z_2, z'_1, z'_2, \omega$  et  $k$ , par suite, éliminer les cinq premières de l'expression de  $2T$ ; mais on y introduira  $\frac{d\sigma}{dt}$ ;  $2T$  deviendra ainsi une fonction de

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, z_3, z_4, \dots, z_n, \\ r'_1, r'_2, \dots, r'_n, \beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_n, z'_3, z'_4, \dots, z'_n, \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\sigma}{dt},$$

et sera homogène et du second degré par rapport aux dérivées de la seconde ligne. Il est cependant impossible d'appliquer le système des équations canoniques en prenant pour les variables  $q_i$  les quantités de la première ligne, et de plus  $\sigma$  et  $\gamma$ ; car ces quantités, ainsi que  $\sigma$ , peuvent être considérées comme des coordonnées, mais cela n'a pas lieu pour  $\gamma$ .

Au reste, on aurait pour  $2T$  une expression plus simple, en partant de l'expression (c) du n° 2, conservant  $\omega$  et éliminant  $z_1, z_2, z'_1, z'_2$ , comme ci-dessus. En désignant par  $d\Omega$  la rotation infiniment petite  $\omega dt$  du plan P, on obtiendrait, pour  $2T$ , une fonction homogène et du second degré des  $r'_i$ , des  $\beta'_i$ , des  $z'_i$ , de  $\frac{d\gamma}{dt}$  et de  $\frac{d\Omega}{dt}$ ; mais  $\gamma$  et  $\Omega$  ne pourraient être assimilés à des coordonnées.

D'après les réflexions que nous venons de faire, nous devons chercher à substituer d'autres variables aux précédentes.

*Substitution des angles  $\xi$  aux angles  $\beta$ .*

6. Désignons par S la trace du plan invariable sur le plan P de l'équateur et par  $\nu$  l'angle des droites L et S; représentons aussi par  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  les angles de  $r_1, r_2, \dots$  avec S. On aura, en supposant les angles  $\xi$  comptés positivement dans le même sens que les angles  $\beta$ ,

$$(g) \quad \beta_1 - \xi_1 = \beta_2 - \xi_2 = \dots = \beta_n - \xi_n = \nu;$$

posons ensuite

$$X = \Sigma m(\gamma w - z\nu), \quad Y = \Sigma m(zu - xw)$$

en nous rappelant que les expressions de ces deux quantités ont été obtenues au n° 5.

La projection de l'axe  $k$  du plan invariable sur la droite S qui lui est perpendiculaire est nulle; on a donc

$$(h) \quad X \cos(\beta - \xi) + Y \sin(\beta - \xi) = 0,$$

et, par suite,

$$\text{tang } \xi = \frac{X \cos \beta + Y \sin \beta}{-X \sin \beta + Y \cos \beta}.$$

Cette formule permettra de calculer très-facilement les angles  $\xi$  au moyen des variables des numéros précédents. Le problème inverse, qui consiste à calculer les variables  $\beta$  au moyen des variables  $\xi$ , est plus compliqué. Pour résoudre cette question, nous avons les équations (g), l'équation (h) ou

$$X \cos \nu + Y \sin \nu = 0,$$

et l'équation

$$G \omega^2 + 4S\omega + 4V = k^2 - (\Sigma m \cdot^2 A)^2.$$

Au moyen de ces  $n + 2$  équations, nous pourrons déterminer les



$n + 2$  quantités  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \omega, \nu$  en fonction de

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n, k.$$

*Sur la démonstration géométrique de  $n$  équations.*

7. Représentons-nous, pendant l'instant  $dt$ , le déplacement angulaire, par rapport à la position de la droite L au commencement de cet instant, de la projection  $m'$  du point  $m$  sur le plan P de l'équateur. Ce déplacement est égal à  $\Lambda dt$  et il peut se décomposer en deux déplacements : 1° le déplacement de  $m'$  par rapport à la droite S; 2° le déplacement de S par rapport à L.

Puisque  $\xi$  est l'angle de  $r$  avec S, le premier de ces deux déplacements a pour valeur  $d\xi$ ; le second est la projection, sur le plan P, de l'angle  $d\tau$  décrit, pendant l'instant  $dt$ , par la droite S sur le plan invariable. Donc, en désignant par U l'angle de l'équateur et du plan invariable, on a

$$\Lambda dt = d\xi + d\tau \cos U.$$

Projetons l'axe  $k$  du plan invariable sur la normale  $Oz$  au plan P, nous aurons

$$k \cos U = \Sigma m(xv - yu) = \Sigma mr^2 \Lambda,$$

et nous en concluons

$$\Lambda dt = d\xi + \frac{1}{k} \frac{d\tau}{dt} \Sigma mr^2 \Lambda.$$

En appliquant cette équation à chacun des points matériels  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , nous obtenons les  $n$  équations

$$\Lambda_1 = \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{1}{k} \frac{d\tau}{dt} \Sigma m_1 r^2 \Lambda,$$

$$\Lambda_2 = \frac{d\xi_2}{dt} + \frac{1}{k} \frac{d\tau}{dt} \Sigma m_2 r^2 \Lambda,$$

.....

*Nouvelle expression de T.*

8. Nous avons trouvé les équations, au nombre de  $n + 3$ ,

$$\beta_1 - \xi_1 = \beta_2 - \xi_2 = \dots = \beta_n - \xi_n = \nu,$$

$$X \cos \nu + Y \sin \nu = 0,$$

$$G\omega^2 + 4S\omega + 4V = k^2 - (\Sigma mr^2 A)^2,$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\omega^2 \Sigma m(z^2 + r^2 \sin^2 \beta) + 2\omega \Sigma mr \sin \beta \frac{dz}{dt}}{k^2 - (\Sigma mr^2 A)^2};$$

nous venons d'obtenir les  $n$  équations

$$A_1 = \frac{d\xi_1}{dt} + \frac{1}{k} \frac{d\sigma}{dt} \Sigma mr^2 A,$$

$$A_2 = \frac{d\xi_2}{dt} + \frac{1}{k} \frac{d\sigma}{dt} \Sigma mr^2 A,$$

.....

Nous avons aussi les deux équations qui expriment que la droite Oz est un axe principal d'inertie

$$\Sigma m z r \cos \xi = 0, \quad \Sigma m z r \sin \xi = 0;$$

différentions-les et nous aurons

$$\Sigma m \frac{dz}{dt} r \cos \xi + \Sigma m z \frac{dr}{dt} \cos \xi - \Sigma m z \xi' r \sin \xi = 0,$$

$$\Sigma m \frac{dz}{dt} r \sin \xi + \Sigma m z \frac{dr}{dt} \sin \xi + \Sigma m z \xi' r \cos \xi = 0.$$

Nous obtenons de la sorte  $2n + 7$  équations, au moyen desquelles on peut tirer les  $2n + 7$  quantités

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \omega, \nu, k,$$

$$A_1, A_2, \dots, A_n, z_1, z_2, z'_1, z'_2$$

en fonction de

$$(i) \quad \begin{cases} r_1, r_2, \dots, r_n, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, z_3, z_4, \dots, z_n, \\ r'_1, r'_2, \dots, r'_n, \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n, z'_3, z'_4, \dots, z'_n, \sigma'. \end{cases}$$

En substituant ces quantités, dans l'expression (c) de  $2T$  du n<sup>o</sup> 2, nous aurons  $2T$  exprimé en fonction des quantités ( $i$ ). De plus,  $2T$  sera homogène et du second degré par rapport aux dérivées des variables par rapport à  $t$ . C'est ce que l'on reconnaît aisément en remarquant que l'expression (c) de  $2T$  est homogène par rapport aux quantités  $r'_i, A_i, z'_i$  et à  $\omega$  et que les  $2n + 7$  équations employées ci-dessus sont homogènes par rapport à

$$r'_1, r'_2, \dots, r'_n, A_1, A_2, \dots, A_n, z'_1, z'_2, \dots, z'_n, \\ \xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n, k, \omega, \sigma'.$$

9. Désignons par  $q_s$  une quelconque des variables de la première ligne ( $i$ ), en supposant l'indice  $s$  susceptible des valeurs 1, 2, 3, ...,  $3n - 2$ ; faisons

$$\frac{dT}{dq'_s} = p_s, \quad \frac{dT}{d\sigma'} = \varpi;$$

en appliquant les équations canoniques du n<sup>o</sup> 5, nous aurons un système de  $6n - 2$  équations différentielles canoniques qu'on obtiendra en faisant  $s = 1, 2, \dots, 3n - 2$  dans les deux formules

$$(j) \quad \frac{dq_s}{dt} = \frac{dH}{dp_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{dH}{dq_s},$$

et ajoutant ces deux autres équations

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dH}{d\varpi}, \quad \frac{d\varpi}{dt} = -\frac{dH}{d\sigma} = 0$$

Comme  $\varpi$  est une constante et que  $H$  ne renferme pas  $\sigma$ , en faisant  $\varpi$  constant dans les équations ( $j$ ), nous aurons un système d'équations différentielles de l'ordre  $6n - 4$  et, après l'intégration de ces équations,  $\sigma$  serait obtenu par une quadrature. Mais, comme l'équation des forces vives

$$H = \text{const.}$$

est une intégrale de ces équations et qu'on en peut éliminer immédiatement le temps qui n'entre que par l'élément  $dt$ , le système peut être considéré comme de l'ordre  $6n - 6$ .

Égalité des deux constantes  $\varpi$  et  $k$ 

10. Nous avons trouvé, d'une part, l'équation

$$(1) \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\Pi}{d\varpi},$$

dans laquelle  $\varpi$  est constant; et, d'autre part,

$$(2) \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\omega^2 \Sigma m (z^2 + r^2 \sin^2 \beta) + 2 \omega \Sigma m r \sin \beta \frac{dz}{dt}}{k^2 - (\Sigma m r^2 \Lambda)^2} h.$$

Les deux équations (1) et (2) doivent revenir à la même; la première ne renferme qu'une constante arbitraire, qui est  $\varpi$ ; la seconde ne contient que la constante arbitraire  $k$ ; donc  $\varpi$  est fonction de  $k$  seulement: il reste à prouver que cette fonction se réduit à  $k$ .

L'équation (1) est homogène par rapport à  $\sigma'$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ , ...,  $p_{3n-2}$  et  $\varpi$ ; le second membre de l'équation (2) peut s'exprimer aussi en fonction de  $p_1$ ,  $p_2$ , ...,  $p_{3n-2}$  et de  $k$ , et il deviendra une fonction homogène du premier degré de ces quantités. On a donc

$$\varpi = ek,$$

$e$  étant une constante indépendante de  $k$ ; car, si l'on avait

$$\varpi = f(k),$$

$f(k)$  n'étant pas homogène et du premier degré en  $k$ , il suffirait de remplacer  $\varpi$  par  $f(k)$ , dans l'équation (1), pour obtenir une équation qui ne serait plus homogène par rapport à la dérivée  $\sigma'$ , les quantités  $p_s$  et la quantité  $k$ , et cette équation est impossible.

$e$  doit donc être un nombre pur, et par conséquent il restera le même si l'on réduit le nombre des points matériels à deux et qu'on les suppose situés dans le plan  $P$  de l'équateur; mais, d'après la solution que j'ai donnée du problème des trois corps, on a alors  $\varpi = k$ , et par conséquent  $e = 1$  (voir ce Journal, p. 357, 1876).

*Marche de la solution.*

11. En intégrant le système des équations canoniques de l'ordre  $3n - 6$  formé par les équations (j) du n° 9, on déterminera, en fonction de  $t$ , les variables

$$r_1, r_2, \dots, r_m, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, z_1, \dots, z_n;$$

en se servant des deux équations

$$\sum m r \cos \xi = 0, \quad \sum m r \sin \xi = 0,$$

on aura ensuite  $z_1$  et  $z_2$ . On obtiendra ainsi la position de tous les points du système matériel par rapport à trois axes rectangulaires mobiles menés par l'origine, savoir l'axe principal d'inertie normal au plan P, la droite S d'intersection du plan P avec le plan invariable et la normale à S située dans le plan P.

Il ne reste plus qu'à déterminer la position occupée dans l'espace par l'angle trièdre de ces coordonnées. Or la droite S est située dans le plan invariable, et l'angle  $\sigma$  qu'elle fait avec une droite fixe située dans ce plan est donné par l'une ou l'autre des formules (1) et (2) du numéro précédent, au moyen d'une quadrature. Ensuite on pourra calculer l'angle U du plan P avec le plan invariable au moyen de la formule

$$k \cos U = \sum m r^2 A;$$

car, au n° 8, nous avons obtenu les quantités A en fonction des variables que nous supposons calculées, et de leurs dérivées par rapport à  $t$ . La position du système est alors entièrement déterminée.

*Extension de la théorie précédente à un système matériel assujéti à des liaisons.*

12. Supposons un système de  $n$  points matériels assujéti à des liaisons et pour lequel, comme précédemment, le principe des forces vives et les trois équations des aires soient applicables.

Pour que ces quatre équations aient lieu, il faut que l'expression de la fonction de forces, formée par rapport à un système de coordonnées rectangulaires, ne change pas quand l'on fait tourner autour de l'origine  $O$  l'angle trièdre des coordonnées, et que, de plus, les équations conditionnelles, qui expriment les liaisons par rapport aux mêmes axes, subsistent après le même mouvement de ces axes.

Toutes les variables que nous avons adoptées, dans la théorie qui précède, peuvent encore être admises pour le système matériel que nous considérons maintenant. D'après ce que nous venons de dire, la fonction de forces et les équations conditionnelles qui expriment les liaisons restent les mêmes par rapport à un système quelconque de coordonnées rectangulaires dont l'origine est en  $O$ . Donc la fonction de forces et les équations de liaisons pourront s'exprimer immédiatement au moyen des coordonnées des points matériels, relatives à l'angle trièdre rectangulaire mobile formé par la normale au plan  $P$ , la droite  $S$  et une normale à ces deux droites, c'est-à-dire au moyen des  $3n$  variables  $r, \xi, z$ . Les  $j$  équations conditionnelles et celles qu'on en déduit par la différentiation par rapport à  $t$  permettent d'éliminer, de l'expression de  $2T$  donnée au n° 8,  $j$  variables et leurs dérivées. Donc le nombre des équations de condition abaissera de deux fois autant d'unités l'ordre du système canonique des équations différentielles du mouvement, et par conséquent l'ordre de ce système est égal à  $6n - 6 - 2j$ .

*Des formes quadratiques binaires et ternaires* [\*];

PAR M. ÉDOUARD SELLING.

à Würzburg.

(Revu et augmenté par l'auteur.)

Le but final des présentes recherches est la solution du problème posé, III, article 278 des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss : *Déterminer si des formes quadratiques ternaires sont équivalentes les unes aux autres et établir toutes les substitutions, au moyen desquelles dans ce cas elles se changent les unes en les autres.* En ce qui concerne les formes définies, la première partie de ce problème a d'abord reçu sa solution de Seeber (*Recherches sur les propriétés des formes quadratiques ternaires positives*, Fribourg, 1831). Après que Gauss (*Comptes rendus de l'Académie de Göttingue*, 1831, article réimprimé dans le *Journal de Crelle*, t. 20, et *OEuvres*, t. II) eut traité des rapports géométriques, une solution plus simple fut donnée par Dirichlet (*Journal de Crelle*, t. 40), et par M. Hermite (*ibid.*); quant à la deuxième partie, elle a été résolue par Eisenstein (*Journal de Crelle*, t. 41). Nous avons, pour les formes quadratiques ternaires indéfinies, les recherches de M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 47), recherches qui toutefois, comme on le verra aux détails, sont susceptibles de quelques compléments et développements.

Il donne un nouvel exposé relativement aux formes ternaires dé-

[\*] Nous avons voulu, par la publication de ce travail, tiré du *Journal* de M. Borchardt (t. 77), donner un témoignage de l'importance que nous attachons aux études arithmétiques, en suivant ainsi l'exemple qui nous a été tracé par M. Liouville, dont de nombreux et importants travaux ont pour objet la théorie des formes quadratiques. Nous saisissons aussi l'occasion de recommander au lecteur de rapprocher des recherches de M. Selling le Mémoire de Bravais, publié dans le *Journal de l'École Polytechnique*, XXX<sup>e</sup> Cahier, sous ce titre : *Sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace.*

(H. R.)

finies comme introduction à l'étude des formes ternaires indéfinies, et relativement aux formes binaires comme introduction et type pour la manière de traiter les formes ternaires en général.

## I. — FORMES BINAIRES DÉFINIES.

*Nouvelles conditions de réduction. — Coefficients homogènes.  
— Rapports géométriques.*

Dès que, dans une forme quadratique  $ax^2 + 2kxy + by^2$ , que je désigne aussi par  $(a, k, b)(x, y)$  ou par  $(a, k, b)$  et dans laquelle  $a, k, b, x$  et  $y$  doivent représenter des grandeurs réelles quelconques, l'invariant  $ab - k^2$ , que je remplace par  $I$ , est positif aussi bien qu'un des coefficients extrêmes, par exemple  $a$ , cette forme ne peut représenter que des valeurs positives; aussi prend-elle alors le nom de *forme positive*. Dans les substitutions  $x = \alpha x' + \beta y', y = \gamma x' + \delta y'$ , au moyen desquelles une forme  $(a, k, b)(x, y)$  se change en  $(a', k', b')(x', y')$ , substitutions que je désigne par  $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$ , les nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  seront réels et entiers; de plus, tant qu'une autre valeur n'aura pas été statuée formellement, le déterminant de la substitution  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$  sera égal à 1. Le problème de délimiter une forme, prise dans les formes d'une classe, ou, ce qui est la même chose, dans toutes les formes équivalentes proprement dites, c'est-à-dire résultant l'une de l'autre au moyen des substitutions indiquées, a déjà reçu une solution satisfaisante de Lagrange (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1773) et la même de Gauss (*Disquisitiones arithmeticae*) qui a introduit pour cette forme le nom de *forme réduite*. Les conditions établies par eux  $-a \leq 2k \leq a \leq b$  pour une pareille forme réduite  $(a, k, b)$  font que  $a$  et  $b$  sont les deux plus petits nombres que les formes peuvent représenter proprement, c'est-à-dire au moyen de nombres entiers premiers entre eux  $x$  et  $y$ . Il en résulte immédiatement que, parmi les formes d'une classe, il y a toujours une pareille forme réduite, une seule, quand l'inégalité existe dans les trois conditions, tandis qu'il y a deux de ces formes différant, en général, entre elles numériquement, qui résultent l'une de l'autre par l'une des deux substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ , ou par les deux à la



fois, quand l'égalité existe dans une ou dans deux des trois conditions.

Toutefois le problème indiqué n'est pas de nature à ne recevoir qu'une seule solution; je préférerai donc, pour mon objet particulier, d'autres conditions de réduction, savoir que  $k$  n'est pas positif, ni  $-k$  plus grand que  $a$  ou  $b$ . Il est vrai que ces conditions sont réalisées dans chaque classe non-seulement par une forme, mais toujours par trois. Soit  $(a, k, b)$  l'une d'elles et posons  $a + b + k = 0$ ,  $b + k + g = 0$ ,  $c + g + b = 0$ , d'où  $a = b + 2g + c$ ,  $b = c + 2g + a$ ,  $c = a + 2k + b$ ; elles seront  $(a, k, b)$ ,  $(b, g, c)$  et  $(c, h, a)$ , et ces trois formes, à l'aide de la substitution  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ , résultent cycliquement l'une de l'autre. Mais l'inconvénient qui paraît exister ici disparaît si l'on exprime symétriquement les formes par  $a, b, c$  ou par  $g, h, k$ ; savoir, si l'on pose  $y - z = u$ ,  $z - x = v$ ,  $x - y = w$ , d'où il s'ensuit que  $u + v + w = 0$ , et si l'on admet préalablement  $z = 0$ , on aura

$$ax^2 + 2kxy + by^2 = -avw - bvu - cw = -ga^2 - hv^2 - kw^2.$$

Comme toutefois les deux dernières expressions ne changent pas quand  $x, y$  et  $z$  sont augmentés ou diminués de la même quantité, et comme la substitution  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$  produit simplement une permutation cyclique entre les nombres  $a, b, c$ , et entre les nombres  $g, h, k$ , il n'existe pas de différence essentielle entre les trois formes  $(a, k, b)$ ,  $(b, g, c)$ ,  $(c, h, a)$ , qui réalisent en même temps mes conditions de réduction. Ces dernières consistent simplement en ce que des trois nombres  $g, h, k$  aucun n'est positif, ou, ce qui revient au même, que des trois nombres positifs  $a, b, c$ , la somme de deux ne devient pas moindre que le troisième. Si l'on atteint à une limite de ces conditions et que l'on ait par exemple  $k = 0$ , les formes pareillement réduites  $(b, k, a)$ ,  $(a, h, c)$ ,  $(c, g, b)$ , qui dans le cas général ne sont équivalentes aux formes  $(a, k, b)$ ,  $(b, g, c)$ ,  $(c, h, a)$  qu'improprement, c'est-à-dire par une substitution ayant le déterminant  $-1$ , et qui en résultent par des permutations non cycliques entre  $a, b, c$  et entre  $g, h, k$ , leur deviennent alors proprement équivalentes. Outre les formes réduites indiquées, il ne peut y en avoir d'autres pareilles dans la même classe : c'est ce qui résulte de ce que, si  $(a, k, b)$  est une forme réduite,  $a, b, c$  sont les plus petites quantités

qu'on puisse représenter proprement par les formes de la classe, c'est à-dire par des nombres  $u, v, w$ , premiers entre eux. La plus grande d'entre elles peut être exprimée encore d'une autre manière dans un cas exceptionnel, savoir, lorsque l'on a atteint une limite des conditions de réduction. Car, si parmi les trois quantités  $u, v, w$ , dont la somme est nulle, l'une est égale à zéro, les deux autres ne peuvent être que  $1$  et  $-1$ , sans quoi elles auraient un diviseur commun; mais, si aucune n'est égale à zéro, alors  $-gu^2 - hv^2 - kw^2$ , où  $g, h, k$  sont négatifs, devient plus grand que dans les cas indiqués. Et pour le cas limite, quand une des quantités  $g, h, k$  est égale à zéro, quand par exemple  $k = 0$ , la quantité  $c$  est, en outre, donnée par le système des valeurs  $1, 1, -2$ , ou  $-1, -1, 2$ , de  $u, v, w$ . De l'autre côté, il est facile de voir que, dans toutes les classes, il y a des formes réduites; on voit aussi comment on peut les trouver. Il est en effet impossible que plus d'une des quantités  $g, h, k$  soit positive ou nulle, la somme de deux quelconques étant toujours négative, et, pourvu que  $k$  soit  $< 0$ , ce qu'en cas de besoin on peut obtenir par l'emploi de la substitution  $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ , de toute forme non réduite  $(a, k, b)$ , on obtient finalement une réduite, si on lui applique, à elle comme à toutes les formes suivantes, la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$  ou  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , suivant que  $g$  ou  $h$  y est positif. En effet, au moyen de ces substitutions,  $g, h, k$  se changent respectivement en  $k + 2g, h + 2g, -g$  et en  $g + 2h, k + 2h, -h$ , et tant qu'une des quantités nouvellement obtenues deviendra positive aussi, elle sera néanmoins,  $k + g, g + h$  et  $h + k$  étant négatives, plus petite que la positive de la forme précédente, de sorte que finalement toutes les trois deviendront nécessairement négatives ou nulles. On peut en outre aisément prévoir combien de fois il faudra répéter la même d'entre les substitutions indiquées, jusqu'à ce que le nouveau coefficient, remplaçant celui qui était supposé positif, devienne nul ou négatif; en d'autres termes, quelles sont les différentes valeurs positives de  $\gamma$  et de  $\beta$  dans les substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  qu'il faudra employer alternativement. Ce sont, en effet, les plus petits nombres qui rendent respectivement nuls ou négatifs  $g - \gamma b, h - \beta a$ . Les valeurs correspondantes

de  $k$  sont d'ailleurs respectivement  $k + \gamma b$ ,  $k + \beta a$ . On pourra ensuite déterminer chaque fois le troisième coefficient non-seulement d'une manière directe, mais encore d'après les deux autres, à l'aide de l'équation  $hk + kg + gh = I$ . A propos de cette équation et des deux suivantes :

$$ag + bh + ck = -2I$$

et

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2(br + ca + ab) = (a + b - c)^2 - 4ab = -4I$$

remarquons encore qu'elles fournissent des conditions de limite pour les coefficients des formes réduites qui prouvent, s'ils sont entiers, que, l'invariant étant donné, le nombre des classes est fini.

Les formes binaires positives ne se changent en général en elles-mêmes que par la substitution  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , mais il y a des exceptions, résultant de l'égalité entre deux des coefficients  $a, b, c$  ou  $g, h, k$ ; car alors les formes deviennent improprement équivalentes à elles-mêmes. Par exemple,  $a$  étant égal à  $b$ , la forme  $(a, k, b)$  se change en elle-même au moyen de la substitution  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . En cas de réunion de pareilles relations, qui ne peut avoir lieu que pour des formes réduites, c'est-à-dire quand  $a = b = c$ , les formes réduites sont par conséquent encore une fois proprement équivalentes à elles-mêmes, savoir, au moyen de la substitution  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , qui, trois fois employée, donne la substitution  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Si un des coefficients  $g, h, k$  devient égal à zéro, ce qui ne peut non plus arriver que pour des formes réduites, les formes sont improprement équivalentes à elles-mêmes, par exemple,  $k$  étant égal à zéro, la forme  $(a, k, b)$  au moyen de la substitution  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Si ce cas se joint avec  $g = h$  ou  $a = b$ , la réunion des substitutions qui leur correspondent donne la substitution  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , au moyen de laquelle  $(a, k, b)$  devient proprement équivalente à elle-même.

La réduction des formes indéfinies, que je ramène à celle des formes positives, peut être exposée, ce qui à vrai dire n'acquiert une importance décisive qu'à propos des formes ternaires, d'une manière

très-claire par l'emploi des considérations géométriques, telles que pour les formes positives, elles ont été publiées pour la première fois par Gauss dans le Recueil cité plus haut. J'ai d'abord à faire ressortir la signification géométrique de mes conditions de réduction des formes binaires positives. Aux diverses valeurs entières  $x$  et  $y$  dans la forme  $(a, k, b)(x, y)$  répondent divers points d'intersection de deux systèmes illimités de lignes droites parallèles équidistantes placées dans un plan sur lesquelles les longueurs  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$  sont les distances de deux points consécutifs, tandis que le cosinus de l'angle compris entre les directions dans le sens positif de ces droites est égal à  $\frac{k}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$ : donc l'aire des parallélogrammes formés par leurs intersections est égale à  $\sqrt{I}$ . Relativement à une forme  $(a', k', b')$  provenant de  $(a, k, b)$  au moyen d'une substitution  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ , le système des points subsiste, mais les côtés des parallélogrammes se modifient. En effet, la droite  $\sqrt{a'}$  est située de telle sorte que, d'une de ses extrémités à l'autre, on arrive en parcourant  $\alpha$  fois la ligne  $\sqrt{a}$  et  $\gamma$  fois la ligne  $\sqrt{b}$ ; il en est de même de  $\sqrt{b'}$ , quand on change  $\alpha, \gamma$  en  $\beta, \delta$ . Comme il en est de même de  $\sqrt{c'}$  quand on change  $\alpha, \gamma$  en  $-\alpha - \beta, -\gamma - \delta$ , on reconnaît la signification de  $k'$  analogue à celle de  $k$ . Comme la forme  $(b, g, c)$  doit provenir de la forme  $(a, k, b)$ , par la substitution  $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ , on revient au point de départ, quand on parcourt successivement chacune des distances  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ , soit dans la direction positive, soit dans la direction négative. Telle est donc la signification géométrique de mes conditions de réduction  $g \leq 0$ ;  $h \leq 0$ ;  $k \leq 0$ , que les angles extérieurs du triangle formé par les trois lignes  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  sont obtus, et que par conséquent ce triangle est acutangle, suivant l'expression usitée. Il suit de ce qui vient d'être dit qu'il n'existe qu'un système de trois pareilles lignes d'une grandeur parfaitement déterminée si, comme l'exige l'équivalence, ces trois lignes ne franchissent pas des points du système et n'en enferment pas dans l'intérieur du triangle. Le système des points coïncide avec lui-même non-seulement après tous les déplacements parallèles par lesquels deux points quelconques coïncident, mais aussi après des rotations dans le plan autour d'un point du système en autant

de positions qu'il y a de substitutions différentes, au moyen desquelles les formes sont proprement équivalentes à elles-mêmes. Ainsi généralement deux positions, quand je compte la position primitive et la substitution  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , dans le cas où l'on suppose  $a = b = c$  six positions, et dans les suivants,  $a = b$ ,  $k = 0$  ou  $b = c$ ,  $g = 0$  ou enfin  $c = a$ ,  $h = 0$  quatre positions. Quand les formes sont improprement équivalentes à elles-mêmes, les coïncidences ont lieu pareillement après des mouvements de rotation du système autour de droites tracées sur son plan. On peut se figurer le passage d'un point du système à un autre par un parcours  $x$  fois répété de  $\sqrt{a}$ ,  $y$  fois de  $\sqrt{b}$  et  $z$  fois de  $\sqrt{c}$ ; dans ce cas, si l'on modifie  $x$ ,  $y$  et  $z$  en y ajoutant un seul et même nombre, cela n'exerce aucune influence sur la position du point final. Si l'on fait  $x$ ,  $y$  ou  $z$  constamment égaux à zéro, cela correspond à la représentation ordinaire par les formes  $(b, g, c)$ ,  $(c, h, a)$  ou  $(a, k, b)$ . Si l'on attribue aux lignes  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$ ,  $\sqrt{c}$ , outre la direction positive ou négative, un côté positif ou négatif et si l'on considère chaque fois comme positif le côté sur lequel est placé le triangle précité, quand les trois côtés sont parcourus dans l'ordre indiqué, suivant la direction positive, la différence  $y - z$ , désignée par  $u$ , indiquera dans laquelle des lignes parallèles à  $\sqrt{a}$  se trouvera le point final en question, en commençant par la ligne qui passe par le point de départ et en marchant dans le sens positif; les différences  $z - x$ ,  $x - y$ , représentées par  $v$ ,  $w$ , donneront des indications analogues

## II. — FORMES BINAIRES INDÉFINIES.

*a. — Les conditions de réduction ramenées à celles des formes positives.*

Les résultats précédents se retrouvent en appliquant à l'un des facteurs complexes conjugués  $\rho x + \sigma y$ ,  $\rho' x + \sigma' y$  de la forme  $ax^2 + 2kxy + by^2$ , la méthode de construction des quantités imaginaires données par Gauss lui-même en 1831, et antérieurement par Argand dès 1806. A l'égard de ces quantités  $\rho = \xi + \zeta_1 i$ ,  $\sigma = \eta + \eta_1 i$ , on aura

$$(1) \quad \xi^2 + \zeta_1^2 = a, \quad \xi\eta + \zeta_1\eta_1 = k, \quad \eta^2 + \eta_1^2 = b:$$

et si l'on considère maintenant, au lieu de la forme positive  $(a, k, b)$ , une forme indéfinie  $(a, k, b)$ , à la place de  $\xi_1, \eta_1$  se présentent des quantités purement imaginaires, que je désignerai par  $\xi_1 i, \eta_1 i$ . Les équations (1) sont alors remplacées par celles-ci :

$$(2) \quad \xi^2 - \xi_1^2 = a, \quad \xi\eta - \xi_1\eta_1 = k, \quad \eta^2 - \eta_1^2 = b.$$

De même donc que dans les équations (1), quand on donne  $a, k, b$ , une des quatre inconnues, qui toutes doivent rester réelles, reste arbitraire dans certaines limites, et que quand par exemple le point initial de la ligne  $\sqrt{b}$  est pris comme origine des axes coordonnés rectangulaires, son point final peut avoir une place arbitraire sur le cercle tracé autour de cette origine avec le rayon  $\sqrt{b}$ , de même en est-il des équations (2); ainsi, par exemple, le point déterminé par les coordonnées rectangulaires  $\eta, \eta_1$  peut avoir une place arbitraire sur l'hyperbole équilatère déterminée par l'équation  $\eta^2 - \eta_1^2 = b$ . Je ramène maintenant la théorie des formes indéfinies à celle des formes positives en me figurant le système des variables réelles  $\xi, \eta, \xi_1, \eta_1$  satisfaisant aux équations (2), introduit dans les équations (1) et en considérant la forme positive ainsi produite  $(a, k, b)$ , que je nomme *la forme positive correspondant à la forme  $(a, k, b)$* . Les conditions nécessaires et suffisantes, que leurs coefficients variables ont à remplir, sont obtenues immédiatement sous la forme la plus utile si, outre la circonstance que  $a$  ne peut pas devenir négatif, on remarque que les invariants des formes  $(a + a, k + k, b + b)$  et  $(a - a, k - k, b - b)$  sont égaux à zéro. En effet, par l'addition et la soustraction des équations ainsi données, on obtient

$$(3) \quad a^2 - k^2 = k^2 - ab$$

et

$$(4) \quad b^2 - 2kk + ab = 0,$$

c'est-à-dire que *les deux formes ont des invariants égaux opposés et leur invariant simultané est égal à zéro*. Il s'ensuit que, lorsqu'on applique la même substitution  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$  à une forme indéfinie et à la forme positive

qui lui correspond, la nouvelle forme positive correspond, à son tour, à la nouvelle forme indéfinie. Au lieu de  $\xi, \eta, \xi_1, \eta_1$ , on obtient dans les nouvelles formes  $\alpha\xi + \gamma\eta, \beta\xi + \delta\eta, \alpha\xi_1 + \gamma\eta_1, \beta\xi_1 + \delta\eta_1$ . Maintenant, sous la réserve d'une restriction ultérieure, fondée sur une différence entre les trois formes  $(a, k, b), (b, g, c)$  et  $(c, h, a)$ , je nomme la forme indéfinie  $(a, k, b)$  réduite, quand la forme positive correspondante  $(a, k, b)$  est réduite pour un système quelconque admissible de ses coefficients variables, d'après la définition donnée plus haut. On reconnaît dès lors que, pour chaque forme indéfinie  $(a, k, b)$ , on peut trouver une équivalente réduite, en supposant un système quelconque admissible de coefficients pour la forme positive correspondante  $(a, k, b)$ , si l'on détermine une substitution qui change cette forme positive en une réduite et en appliquant cette substitution pareillement à  $(a, k, b)$ . Maintenant il s'agit de transformer les conditions de la réduction, de telle sorte que l'on soit dispensé de se reporter à la forme positive correspondante.

Désignant  $k^2 - ab$  par  $I$ , je définis les trois quantités  $h, g, c$  par les équations

$$a + h + k = 0, \quad b + k + g = 0, \quad c + g + h = 0,$$

au moyen desquelles, soit dit en passant, l'équation (4) peut aussi être remplacée par celles-ci :

$$ga + hb + kc = 0, \quad \text{ou} \quad ag + bh + ck = 0.$$

Je ne conserve que pour la représentation géométrique les quantités  $\xi, \eta, \xi_1, \eta_1$  éliminées dans les équations (3) et (4), et je remarque qu'on obtiendra tous les systèmes admissibles de valeurs  $a, k, b$ , en faisant parcourir au point  $\eta, \eta_1$  une seule de ses deux branches hyperboliques. Ajoutons encore que des deux points  $\xi, \xi_1$  y appartenants, dont chacun décrit complètement une branche hyperbolique, on peut ne faire attention qu'à un seul, ou, ce qui revient au même, n'admettre qu'un des deux signes dans l'équation  $\xi\eta_1 - \xi_1\eta = \pm\sqrt{I}$  résultant de l'équation (3); car le changement des signes de  $\sqrt{I}$  n'aurait d'autre effet que de conduire simplement d'un système de valeurs de  $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$



que je viens d'admettre, à un autre pareillement déjà admis. Je veux pour le moment excepter le cas où  $I$  sera un nombre carré. Comme coefficients des formes indéfinies, je n'admets que des nombres entiers; alors un coefficient extrême tel que  $b$  ne peut pas devenir égal à zéro. Maintenant  $\sqrt{b}$  apparaît géométriquement d'une manière immédiate comme la ligne droite conduisant du point zéro au point  $\alpha, \alpha_1, \sqrt{a}$  comme la ligne droite conduisant du point zéro au point  $\xi, \xi_1$ , ou mieux, du point  $-\xi, -\xi_1$  au point zéro,  $k$  est  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$  multiplié par le cosinus de la différence des directions de ces deux lignes. En ajoutant les points d'intersection de deux rangées indéfinies de lignes parallèles équidistantes, on obtient le même système de points que ci-dessus; mais ce système de points est maintenant mobile, en ce sens que chaque point parcourt simultanément, de manière continue et dans une seule et même direction, une branche d'une hyperbole équilatère qui lui est propre, tandis que les parallélogrammes et autres figures rectilignes, que les points déterminent, conservent une aire constante. Dans toutes les positions, on peut d'une manière unique considérer les points comme les sommets de triangles, tous acutangles et congruents, ce qui détermine chaque fois une forme positive réduite, et la forme indéfinie correspondante, abstraction faite de la permutation cyclique encore possible entre  $a, b, c$  et entre  $a, b, c$ . Il faut maintenant énoncer les conditions sous lesquelles  $(a, k, b)$  peut devenir une réduite, et qui rendront possible une position du système de points, dans laquelle aucune des trois quantités  $g, h, k$  n'est positive. Simultanément avec l'une des trois quantités  $g, h, k$ , les deux autres aussi deviennent infinies; en même temps  $g, h$  et  $k$  ne peuvent pas être tous à la fois négatifs. C'est ce qui résulte immédiatement de l'étude du triangle en question, dont l'aire est  $\pm \frac{1}{2} \sqrt{I}$ , attendu que  $a, b, c$  ne peuvent devenir plus petits que les valeurs absolues de  $a, b, c$ , respectivement, par conséquent pas plus petits que 1. S'il y a donc une position dans laquelle aucune de ces trois variables continues n'est positive, il faut qu'il y ait au moins deux positions, où l'une d'entre elles soit égale à zéro, ce qui entraîne que les deux autres sont négatives. Si, par exemple,  $k$  devient égal à zéro, l'équation (4) donnera comme condition nécessaire que  $a$  et  $b$  aient des signes différents, et démontre,



jointe avec l'équation (3), aussi que cette condition est suffisante. On obtient  $\sqrt{\frac{-a}{b}I}$  et  $\sqrt{\frac{-b}{a}I}$  pour les valeurs correspondantes de  $a$  et  $b$ . D'après les mêmes équations, la variation continue de  $k$  suit, en vertu de cette condition, toujours la même direction, puisque dans un maximum ou un minimum de  $k$  le déterminant  $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix}$  devrait être égal à zéro. En avançant donc dans une direction déterminée,  $k$  devient et reste négatif, et, comme en outre  $g$  et  $h$ , partant des valeurs  $-b$  et  $-a$ , ne deviennent pas positifs avant un changement fini, mais ne peuvent non plus rester l'un et l'autre négatifs à l'infini, il y aura pour les variables un intervalle qui ne sera ni infiniment petit ni infiniment grand, dans lequel  $g$ ,  $h$  et  $k$  sont négatifs, et dans lequel par conséquent  $(a, k, b)$  est réduite. En vertu de la condition posée, une seule des quantités  $g$  et  $h$  passe par zéro : c'est ce qui ressort aussi de ce que, quand  $a$  et  $b$  ont des signes différents, ou  $b$  et  $c$  en ont aussi des différents, tandis que  $a$  et  $c$  ont le même, ou bien  $a$  et  $c$  en ont des différents, et  $b$  et  $c$  ont le même. Sous la condition que  $a$  et  $b$  ont des signes différents, on devrait donc, suivant la définition établie plus haut, donner à la forme  $(a, k, b)$  la dénomination de *forme réduite*, ainsi qu'aux formes  $(b, g, c)$  et  $(c, h, a)$ , parce que les trois formes positives correspondantes sont réduites. Maintenant je limite cette définition en ce sens que je ne donnerai plus la dénomination de formes réduites qu'à celles des formes indéfinies dans les formes positives correspondantes desquelles le coefficient du milieu peut devenir égal à zéro, ce qui n'est possible que pour deux des trois formes indiquées. Le critérium d'une forme indéfinie réduite ainsi déterminée consiste donc simplement en ce que les deux coefficients extrêmes ont des signes opposés. L'équation  $k^2 - ab = I$  montre alors que, étant donné un invariant, il ne peut y avoir qu'un nombre limité de formes indéfinies réduites, à coefficients entiers. Pour n'avoir à indiquer qu'une seule des deux formes  $(a, k, b)$  et  $(b, -k, a)$  réduites et proprement équivalentes, j'ajoute une nouvelle restriction à la définition des formes réduites, c'est que le premier coefficient doit être positif; il s'ensuit que des trois formes  $(a, k, b)$ ,  $(b, g, c)$ ,  $(c, h, a)$ , il n'y en a jamais qu'une seule qui puisse être réduite.

*b. — Périodes. Réduites spéciales.*

La question de savoir quelles formes indéfinies sont équivalentes entre elles se résout en quelque sorte d'elle-même, d'après ce qu'on vient de voir. Si, en effet, la forme indéfinie réduite  $(a, k, b)$  se change, par une substitution quelconque, en la forme réduite  $(a', k', b')$  et de même la forme positive  $(a, k, b)$ , moyennant la même substitution, en la forme  $(a', k', b')$ , les équations (3) et (4) sont réalisées par  $a', k', b'$ ;  $a', k', b'$ , aussi bien que par  $a, k, b$ ;  $a, k, b$ , et elles sont les seules conditions à remplir par les quantités variables. De même donc que, parmi les positions admissibles du système des points, il devait s'en produire dans lesquelles  $(a, k, b)$  était réduit, de même il doit aussi s'en produire, parmi ces positions, d'autres dans lesquelles  $(a', k', b')$  est réduit. Il suffit par suite de faire prendre successivement au système des points toutes les positions admissibles, de déterminer, dans chaque position, la forme positive réduite et la substitution au moyen de laquelle elle résulte de  $(a, k, b)$  et d'effectuer cette substitution dans  $(a, k, b)$ . On obtient, en opérant ainsi, toutes les substitutions au déterminant 1, par lesquelles  $(a, k, b)$  se change en elle-même, car ce sont précisément les substitutions par lesquelles la forme réduite  $(a, k, b)$  se change en des formes réduites  $(a', k', b')$  dont les coefficients concordent numériquement avec ceux de  $(a, k, b)$ . Pour trouver les réduites équivalentes à  $(a, k, b)$ , admettons, par exemple, que  $a$  soit positif,  $b$  et  $c$  négatifs, alors  $(a, k, b)$  est réduite pour certaines positions du système des points ou, si je dois m'exprimer ainsi, pour un certain *intervalle* qui commence par  $k = 0$  et se termine par  $h = 0$ . Si cette limite est franchie, si par conséquent  $h$  devient  $> 0$ , ou, ce qui revient au même,  $-k > a$ , on pourra, à l'aide de la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , déduire de  $(a, k, b)$  une nouvelle forme réduite. Par la même substitution, on déduit de  $(a, k, b)$  la forme  $(a, -h, c)$  ou  $a, a+k, a+2k+b$ , qui est donc de même une forme réduite, et répond ainsi à un nouvel intervalle. Si, dans un deuxième et dernier cas à examiner,  $a$  et  $c$  étaient positifs,  $b$  négatif,  $(a, k, b)$

serait réduite pour l'intervalle de  $k = 0$  jusqu'à  $g = 0$ . Au delà de cette limite,  $g$  deviendrait  $> 0$ , ou, ce qui revient au même,  $-k > b$ , et, à l'aide de la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ , on déduirait de  $(a, k, b)$  une nouvelle forme réduite. A l'aide de la même substitution, on déduirait de  $(a, k, b)$  la forme  $(c, -g, b)$  ou  $(a + 2k + b, k + b, b)$  qui serait donc alors la forme réduite consécutive à  $(a, k, b)$ . Comme les nouvelles formes ont les mêmes propriétés que la forme  $(a, k, b)$ , dans le premier ou dans le deuxième cas étudié, et que particulièrement aussi aux valeurs initiales des intervalles, pour lesquels elles sont réduites, le coefficient moyen des formes positives qui leur correspondent devient égal à zéro, on reconnaît que, de chaque forme réduite ainsi obtenue, on peut de nouveau en déduire une autre par l'emploi de telle ou telle des deux substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ , suivant que le coefficient extérieur nouveau provenant de là est négatif ou positif; mais, comme il n'existe qu'un nombre fini de formes réduites d'un invariant donné, on reconnaît que, parmi les formes nouvellement obtenues, une doit une fois coïncider avec une forme qu'on a déjà vue, et comme les coefficients d'une forme déterminent complètement la substitution qu'on doit lui appliquer ultérieurement, et par là la forme suivante, on constate que toute la série des formes réduites équivalentes consiste en un nombre fini de telles formes, se répétant périodiquement à l'infini. Cette période se reproduit à l'infini non-seulement dans la direction que nous venons de suivre, mais encore dans la direction contraire: c'est ce qui résulte de ce que, dans cette dernière direction aussi, chaque forme réduite suivante n'est déterminée que par la précédente. La loi de la série des différentes formes réduites peut aussi s'exprimer, abstraction faite, pour abrégér, de la fixation arbitraire  $a > 0$ , simplement comme il suit. Si des trois coefficients  $a, b, c$ , satisfaisant à l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2bc - 2ca - 2ab = 4I,$$

$a$  et  $c$  ont le même signe,  $b$  le signe contraire, la forme réduite  $(a, b, c)$  est située entre deux autres formes réduites, dans l'une desquelles  $a$  et  $b$  sont les mêmes qu'au paravant, tandis que pour  $c$  on prend l'autre valeur satisfaisant de même à cette équation; dans la seconde,  $b$  et  $c$

sont les mêmes, et pour  $a$  on emploie l'autre valeur satisfaisant à cette équation.

Méritent particulièrement d'être distinguées d'entre toutes les formes réduites et d'être appelées *réduites spéciales* celles des formes réduites qui, si l'on s'avance dans la direction étudiée en premier lieu, ne se changent pas en la subséquente, à l'aide de celle des deux substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$  par laquelle elles sont nées de la précédente. Les autres réduites peuvent être nommées *réduites intermédiaires*, et je dis d'une réduite intermédiaire : elle est située dans l'espace de  $a$  ou dans l'espace de  $b$ , suivant que c'est le coefficient  $a$  ou le coefficient  $b$  qui paraît aussi dans la réduite précédente et dans la réduite subséquente, tandis que d'une réduite spéciale  $(a, k, b)$  je dis aussi bien : elle est située dans l'espace de  $a$  que : elle est située dans l'espace de  $b$ . La propriété caractéristique par laquelle  $(a, k, b)$ , quand c'est une *réduite spéciale*, se distingue de réduites intermédiaires, consiste en ce que *non-seulement*  $a$  et  $b$ , *mais encore*  $a - 2k + b$  et  $a + 2k + b$  *ont des signes opposés*, ce qui peut encore s'exprimer ainsi : la valeur absolue de  $k$  est non-seulement plus petite que  $\sqrt{I}$ , mais encore plus grande que celle de  $\frac{1}{2}(a + b)$ . La seconde condition exprimée par  $I$ ,  $a$  et  $k$  seuls devient, quand on indique par des parenthèses ou des crochets qu'il faut prendre de la quantité qui y est mise la valeur absolue,  $2a(k) > a^2 + k^2 - I > -2a(k)$  ou  $[a - (k)] < \sqrt{I} < a + (k)$ . La condition  $[a - (k)] < \sqrt{I}$ , comparée à la condition  $(k) < \sqrt{I}$ , n'est à considérer que lorsque l'on a  $a > \sqrt{I}$  et montre que, dans ce cas, si  $k$  est négatif, à côté de  $(a, k, b)$ , est aussi la forme

$$(a, a + k, a + 2k + b)$$

résultant de  $(a, k, b)$  par la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , mais, si  $k$  est positif, la forme  $(a, k - a, a - 2k + b)$ , résultant de  $(a, k, b)$  par la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , est réduite, et même, comme  $2a - (k)$  deviendrait  $> \sqrt{I}$ , réduite spéciale. La condition  $\sqrt{I} < a + (k)$  n'acquiert de l'importance que quand  $a$  est  $< \sqrt{I}$  et indique immédiatement la loi, valable aussi pour le cas précédent, d'après laquelle, si l'on donne

une réduite quelconque dont le premier coefficient est  $a$ , on peut trouver immédiatement les deux réduites spéciales situées dans l'espace de  $a$ . Les coefficients moyens des réduites situées dans cet espace forment en effet une série arithmétique dont la raison est  $a$ , et deux d'entre eux au moins sont situés entre  $+\sqrt{I}$  et  $-\sqrt{I}$ . Les coefficients moyens des deux réduites spéciales sont maintenant toujours le premier et le dernier des termes de cette série situés entre  $+\sqrt{I}$  et  $-\sqrt{I}$ . De ces deux coefficients, aucun ne peut devenir égal à zéro ; ils ont toujours des signes opposés. Inutile de dire que les mêmes conclusions sont valables pour les réduites situées dans l'espace d'un troisième coefficient négatif. Si  $(a, k, b)$  est une réduite spéciale au coefficient moyen négatif, ce que je viens de dire montre que la réduite spéciale, qui la suit dans la direction précédemment adoptée, résulte de  $(a, k, b)$  par une substitution  $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , dans laquelle le nombre positif  $\beta$  est le nombre entier le plus grand qui soit contenu dans  $\frac{\sqrt{I}-k}{a}$ .

Si, au contraire, dans une réduite spéciale  $(a, k, b)$ , le coefficient moyen est positif, elle donne naissance à la réduite spéciale suivante au moyen d'une substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix}$ , dans laquelle le nombre positif  $\gamma$  est le plus grand nombre entier contenu dans  $\frac{\sqrt{I}+k}{b}$ .

Si, en joignant la substitution  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$  à la suite des substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{vmatrix}$  et à celles-ci  $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , je représentais mes réduites spéciales de telle sorte que leurs coefficients moyens fussent toujours positifs, ce que je m'abstiens de faire principalement à cause de l'application aux formes ternaires, elles seraient une à une, et dans l'ordre de la série, identiques avec les formes que Gauss appelle simplement *réduites* (*Disquisitiones arithmeticae*, art. 183). Les conditions

$$0 < k < \sqrt{I} \quad \text{et} \quad [(a) - k] < \sqrt{I} < (a) + k,$$

en lesquelles se transformeraient alors celles qui ont été indiquées plus haut, apparaissent immédiatement comme identiques à celles de Gauss. L'exposé que Dirichlet (*Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1854,

ou *Leçons sur la théorie des nombres*, publiées par Dedekind) a donné, pour les conditions en question, savoir que, des deux racines  $\omega$  de l'équation  $a + 2k\omega + b\omega^2 = 0$ , l'une soit positive, l'autre négative, la valeur absolue de l'une  $< 1$ , de l'autre  $> 1$ , revient complètement à mes conditions purement arithmétiques, savoir que  $a - 2k + b$  et  $a + 2k + b$ , ainsi que  $a$  et  $b$ , ont des signes opposés. Je dois ajouter ici que cet énoncé a été déjà publié par M. Lipschitz (*Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin*, 1865, p. 184).

c. — *Les réduites principales de M. Hermite.*

A la place de mes réduites spéciales, M. Hermite arrive à d'autres formes qu'il appelle *réduites principales* et qui, par conséquent, diffèrent aussi des réduites de Gauss, précisément parce que M. Hermite prend pour base la définition des formes positives réduites donnée par Gauss. La forme positive  $\varphi$  employée par M. Hermite (t. XLI du *Journal de Crelle*, p. 204), concorde avec ma forme  $(a, k, b)$ , en ce qui concerne les rapports des coefficients, si l'on remplace son  $\lambda$  par  $\left(\frac{\frac{a}{2} - \frac{a}{2}}{\frac{a}{2} + \frac{a}{2}}\right)^2$ .

Toutes les formes réduites d'après ma définition appartiennent aussi à ce que M. Hermite appelle *réduites* (abstraction faite de la substitution  $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ , que l'on devrait peut-être encore employer) parce que, si dans  $(a, k, b)$  le coefficient moyen est égal à zéro,  $(a, k, b)$  ou  $(b, -k, a)$ , d'après la définition de Gauss, est aussi une réduite. L'inverse n'a point lieu. En effet,  $k$  passe toujours par zéro, quand pour  $(a, k, b)$  les deux limites de la réduction de Gauss sont les valeurs :  $k = -\frac{a}{2}$  et  $k = \frac{a}{2}$ ; mais, si elles sont  $k = \frac{a}{2}$  et  $a = b$  ou  $k = \frac{a}{2}$  et  $a = b$ , dans lesquels cas  $(a, k, b)$  est nommée par M. Hermite *réduite principale*, on ne peut pas l'affirmer, et cela n'a pas lieu quand  $a$  et  $b$  ont les mêmes signes. Si alors  $a$  et  $b$  sont positifs,  $k$  négatif, la série des réduites devient, d'après M. Hermite,

$$(b, g, c) \begin{vmatrix} 11 & \\ 01 \end{vmatrix} (b, -k, a) \begin{vmatrix} 01 \\ -10 \end{vmatrix} (a, k, b) \begin{vmatrix} 11 \\ 01 \end{vmatrix} (a, -h, c),$$

tandis que pour moi  $(b, g, c)$  se change immédiatement en  $(a, -h, c)$  par la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ . Dans ce cas,  $(b, g, c)$  et  $(a, -h, c)$  sont des réduites spéciales, parce que, d'après la condition de M. Hermite pour les réduites principales qui résulte immédiatement de mon équation (4),  $(k) > (a + b)$  ou plutôt  $(k) \geq (a + b)$ , on a, dans ce cas,  $a + k + b \leq 0$ ; donc, *a fortiori*,  $a + 4k + 4b < 0$  et  $4a + 4k + b < 0$ ; donc  $b - 2g + c < 0$  et  $a - 2h + c < 0$ , tandis que  $a = b + 2g + c > 0$  et  $b = a + 2h + c > 0$ . Mais, alors,  $(b, g, c)$  n'est généralement pas une réduite principale, car la valeur absolue du coefficient moyen  $-k - b$  est plus petite que la somme des coefficients extérieurs, savoir  $-k - b + (-a - k - b)$ . Il en est de même pour  $(a, -b, c)$ . Toutefois, dans le cas de  $a + k + b = 0$ ,  $(b, g, c)$  et  $(a, -h, c)$  sont aussi réduites principales. Le point de départ et le point final de l'intervalle pour lequel  $(a, k, b)$  est une réduite coïncident alors. Dans le cas de  $a > 0, b > 0, k > 0$ , tout ce qui vient d'être dit pour la forme  $(a, k, b)$  aurait lieu pour la forme  $(b, -k, a)$ . Si  $a$  et  $b$  étaient négatifs, l'analogie serait complète. Toutes les réduites principales  $(a, k, b)$ , dans lesquelles  $a > 0, b < 0$ , sont aussi des réduites spéciales; les associées opposées  $(b, -k, a)$  sont toutes celles dans lesquelles  $a < 0, b < 0$ ; car de  $(k) \geq (a + b)$  résulte  $(k) > \left(\frac{a+b}{2}\right)$ .

Les périodes de réduites principales de M. Hermite, parmi lesquelles donc, dans certaines circonstances, une seule forme tient lieu de deux réduites de Gauss, peuvent, d'après cela, renfermer moins de formes que les périodes de Gauss, de même qu'aussi, dans le développement en une fraction continue périodique, le nombre des dénominateurs partiels d'une période peut diminuer si l'on admet des restes de différents signes. Des conditions de M. Hermite,  $-(k) \leq a + b \leq (k)$ , l'une, quand  $a$  et  $b$  ont des signes différents, énonce que  $(a, k, b)$ , l'autre que  $(b, -k, a)$  peut devenir une réduite de Gauss; mais, quand  $a$  et  $b$  ont les mêmes signes, l'une énonce les deux choses et l'autre n'énonce rien. Si l'on modifie ces conditions de telle sorte qu'elles s'adaptent au calcul immédiat des réduites principales consécutives, savoir que, outre  $l$  et  $k$ , elles ne renferment qu'un des coefficients extrêmes, par exemple  $a$ , elles



deviennent

$$a^2 - (ak) + k^2 \leq I \leq a^2 + (ak) + k^2$$

au moyen de  $a^2 - (ak) \leq ab \leq a^2 + (ak)$ . D'après cela il est facile de déduire l'un de l'autre les coefficients moyens de deux réduites principales situées dans l'espace de  $a$ , ces réduites se changeant l'une dans l'autre au moyen de substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ . En effet, si l'on a  $a^2 > I$ , l'un de ces coefficients se trouve

$$\text{entre } -\frac{a}{2} - \sqrt{I - \frac{3}{4}a^2} \quad \text{et} \quad -\frac{a}{2} + \sqrt{I - \frac{3}{4}a^2},$$

l'autre

$$\text{entre } \frac{a}{2} - \sqrt{I - \frac{3}{4}a^2} \quad \text{et} \quad \frac{a}{2} + \sqrt{I - \frac{3}{4}a^2},$$

d'où s'ensuit ( $\beta = 1$ ). Mais, si  $a^2 < I$ , l'un de ces coefficients se trouve

$$\text{entre } -\frac{a}{2} - \sqrt{I - \frac{3}{4}a^2} \quad \text{et} \quad \frac{a}{2} - \sqrt{I - \frac{3}{4}a^2},$$

et l'autre

$$\text{entre } -\frac{a}{2} + \sqrt{I - \frac{3}{4}a^2} \quad \text{et} \quad \frac{a}{2} + \sqrt{I - \frac{3}{4}a^2},$$

ce qui donne généralement à  $\beta$  une valeur, et, dans le cas où l'une des limites  $a + b \pm k = 0$  est atteinte, deux valeurs, qui diffèrent l'une de l'autre d'une unité. En effet, par exemple, si l'on suppose  $a + b + k = 0$ , à côté de  $(a, k, b)$ , la forme  $(a, -h, c)$ , en même temps que  $(b, g, c)$ ,  $(b, -k, a)$ ,  $(c, h, a)$  et  $(c, -g, b)$  est une réduite principale, cela résultant immédiatement de ce que les conditions  $a = b = -2k$  peuvent être remplies.

De mes réduites intermédiaires, une quelconque  $(a, k, b)$  est évidemment située dans l'espace de  $a$  ou de  $b$ , suivant que le signe de  $a - 2k + b$  et  $a + 2k + b$ , par conséquent aussi de  $a + b$ , coïncide avec celui de  $b$  ou de  $a$ , suivant que, par conséquent,  $a$  est plus petit ou plus grand que  $-b$ . La même chose peut se dire, relativement aux valeurs absolues de  $a$  et  $b$ , des réduites intermédiaires de M. Her-



nite, comme le montre mon équation (4) jointe avec l'équation  $k = 0$ , toujours possible dans ces formes, d'après ce qui a été dit plus haut. Parmi les réduites intermédiaires situées dans l'espace de  $a$ , la forme  $(a, k, b)$ , lorsque la valeur absolue de  $k$  devient  $< \frac{a}{2}$ , mérite particulièrement d'être distinguée; au lieu de cette réduite, si, dans un cas, on a  $k = \frac{a}{2}$ , par conséquent, dans un autre,  $k = -\frac{a}{2}$ , on peut à volonté prendre l'une ou l'autre. La forme positive correspondante  $(a, k, b)$  est une réduite de Gauss pour la valeur minimum de  $a$ . L'analogie est la même pour les réduites intermédiaires  $(a, k, b)$  situées dans l'espace de  $b$ . Les formes ainsi mises en évidence appartiennent à celles que Legendre appelle *réduites à la forme ordinaire* (*Théorie des nombres*, 3<sup>e</sup> édition, 1<sup>re</sup> Partie, § 13). Mais si, dans l'espace de  $a$ , il n'existe pas de réduites intermédiaires, si, par conséquent, une des réduites spéciales situées dans cet espace remplit la condition  $(2k) < a$  ou que toutes deux remplissent la condition  $(2k) = a$ , il peut arriver que, pour la première ou les deux, on ait  $-b < (2k)$ . Legendre prescrit, afin d'obtenir une forme semblable pour un espace de ce genre, d'appliquer des substitutions ultérieures à la forme obtenue, jusqu'à ce que la valeur absolue du double coefficient moyen ne dépasse plus celle d'aucun coefficient extrême. Mais, à cet effet, une seule substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$  suffit, parce que la diminution de  $(k)$  produit une augmentation correspondante de  $a$ . La forme à obtenir de la sorte devient donc évidemment la même que celle que l'on obtient pour l'espace de  $b$ . Ce n'est donc pas un effet du hasard si, dans l'exemple donné par Legendre, page 135, une forme se reproduit deux fois de suite.

C'est parmi les réduites dont j'ai parlé en dernier lieu qu'est choisie la forme désignée par Gauss (*Disquisitiones arithmetice*, art. 223), comme forme représentante de sa classe.

*d. — L'invariant, nombre carré négatif.*

Par chacune des formes indéfinies  $(a, k, b)$  exclues plus haut, à partir d'un certain point, dans lesquelles  $I = k^2 - ab$  est un nombre

carré, zéro est susceptible d'une représentation propre; chacune de ces formes a donc des formes équivalentes, dans lesquelles le premier coefficient est = 0. Soit  $(a, k, b)$  une de ces formes, soit  $k$  la racine carrée positive du nombre carré  $I$  supposé différent de zéro, et supposons  $b$  non égal à zéro ni divisible par  $2k$ . En employant le signe inférieur dans l'équation précédemment donnée  $\xi\eta_1 - \xi_1\eta = \pm\sqrt{I}$ , on obtient alors  $b\xi = k(\eta + \eta_1) = b\xi_1$ . Tandis que le point  $(\eta, \eta_1)$  parcourt une branche de son hyperbole équilatère, le point  $(\xi, \xi_1)$  ne peut alors se mouvoir que sur l'une des deux lignes droites, en lesquelles dégénère son hyperbole équilatère, et cela seulement d'un côté du point zéro, attendu que la valeur absolue de celle des deux quantités  $\eta$  et  $\eta_1$ , qui ne change pas son signe, l'emporte toujours sur l'autre. Si  $\eta$  et  $\eta_1$ , ayant des signes opposés, deviennent infinis, l'équation  $(\eta - \eta_1)(\eta + \eta_1) = b$  montre que  $\xi$  et  $\xi_1$  approchent de la limite zéro, ainsi que  $a$  et  $b$ . Si maintenant  $(a, k, b)$  doit être réduite, dans la forme positive correspondante  $(a, k, b)$ , les conditions  $k < 0$ ,  $-k < a$ ,  $-k < b$  peuvent être remplies, et les nombres  $b$  et  $k$  devront, d'après l'équation  $ba = 2kk$ , résultant de l'équation (4), avoir des signes différents: en outre  $\frac{-b}{2k}$  devra être  $< 1$ . Si  $(0, k, b)$  ne remplit pas ces conditions, je considérerai, au lieu de cette forme, la nouvelle forme qui en provient par une substitution  $\begin{vmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , et qui, désignée elle-même par  $(0, k, b)$ , remplit les conditions  $-2k < b < 0$ . La troisième condition est ensuite remplie d'elle-même, d'après ce qui vient d'être remarqué, par les points  $\eta, \eta_1$ , qui sont suffisamment éloignés sur leur branche hyperbolique dans une certaine direction, et cela à partir du point pour lequel  $\eta = 0$ ; donc  $b = k\sqrt{\frac{-b}{c}} = k\sqrt{\frac{-b}{2k+b}}$ . Si l'on franchit ce point dans la direction opposée, il faut d'abord employer une substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$  pour déduire de nouveau de  $(a, k, b)$  une réduite positive, et par là de  $(0, k, b)$  une nouvelle réduite indéfinie. Le procédé développé plus haut, pour le cas où  $I$  ne serait pas un nombre carré pour faire dériver les réduites consécutives, peut maintenant s'appliquer, en vertu des mêmes motifs, aussi à cette forme  $(2k+b, k+b, b)$  et aux formes qui les suivent par là jusqu'à ce

que l'on arrive ainsi à une forme  $(a', k', b')$ , dans laquelle  $c' = 0$ , pendant que les points positifs  $\xi$ ,  $\xi_1$  et  $\eta$ ,  $\eta_1$  continuent à se mouvoir sur leurs voies toujours dans la même direction. En tout cas, il faudrait qu'une pareille forme précédât immédiatement une forme  $(a'', k'', b'')$  dans laquelle  $a''$  ou  $b''$  serait égale à zéro, puisque, suivant que la seconde forme provient de la première, par la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$  ou  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ , on obtient  $a''$  ou  $b''$  égal à  $c'$ . Il faut d'ailleurs qu'une pareille forme  $(a', k', b')$  apparaisse réellement; car, d'abord, les autres réduites dans lesquelles les coefficients extrêmes doivent avoir des signes opposés ne peuvent exister qu'en nombre fini; de plus, aucune d'elles ne peut se présenter plus d'une fois, parce que cela suffirait pour conclure qu'elles formeraient des périodes semblables non-seulement en avant, mais encore en arrière; enfin, par les mêmes motifs que plus haut, aucune de ces autres réduites n'est telle que sa forme positive correspondante puisse rester réduite si un de ses coefficients variables devenait infini. Or la dernière qualité appartient à la forme  $(a', k', b')$ , dans laquelle on a  $a' + 2k' + b' = 0$ . On a de plus  $0 < a' < -2k'$ . Donc la forme  $(c', h', a')$  est réduite d'une manière analogue à ce qu'on a étudié relativement à la forme  $(0, k, b)$ , tandis que le sommet mobile  $\xi\xi_1$  du triangle déterminé par  $(c', h', a')$ , à partir de la position définie par  $k' = 0$ , consécutivement par  $-h' = a'$ , s'avance toujours à l'infini, sur sa branche hyperbolique, dans la direction suivie jusqu'alors. En même temps les variables primitives  $\xi$ ,  $\xi_1$ ,  $\eta$ ,  $\eta_1$  deviennent aussi infinies, les deux dernières ayant des signes égaux. *A la place de la période répétée un nombre de fois infini, de formes réduites se trouve donc dans le cas où  $k^2 - ab$  est un nombre carré, une série de formes réduites ne paraissant qu'une fois chacune; dans la première  $(a, k, b)$  on a le coefficient  $a = 0$ , dans la dernière  $(a', k', b')$  le coefficient  $c' = 0$ . Comme  $(c', h', a')$  est réduite en même temps que  $(a', k', b')$ , la forme indéfinie  $(0, h', a')$  a aussi le caractère d'une réduite. La substitution  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ , au moyen de laquelle la forme  $(0, h', a')$ , qui ne diffère pas essentiellement de  $(a', k', b')$ , résulte de  $(0, k, b)$ , naît de la combinaison de la substitution, ne contenant que des coefficients positifs, au moyen de laquelle  $(a', k', b')$  résulte de  $(0, k, b)$  par la substitution  $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ . Il suit de là  $-\alpha > \beta > 0$ ,*

$-\gamma > \delta > 0$ . De  $(o, k, b)(\alpha, \gamma) = 0$  résulte de plus, quand  $m$  désigne le plus grand commun diviseur entre  $2k$  et  $b$ , que  $\alpha = \frac{b}{m}$ ,  $\gamma = \frac{-2k}{m}$ , et, en égard à la remarque que je viens de faire,  $\beta$  et  $\delta$  sont complètement déterminés par l'équation

$$\frac{b}{m} \delta + \frac{2k}{m} \beta = 1.$$

Si maintenant on exprime  $h'$  et  $a'$  par  $k, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ , on obtient  $h' = -k$  et  $a' = m\delta$ . Comme les formes  $(o, k, 2ku)$  sont proprement équivalentes aux formes  $(o, k, o)$  et  $(o, -k, o)$ , et que, dans les formes positives qui correspondent aux dernières, le coefficient moyen est constamment égal à zéro, on peut maintenant dire en général que, dans chaque classe de formes équivalentes appartenant à l'invariant  $-k^2$ , il y a une forme, une seule  $(o, k, b)$ , dans laquelle  $2k > -b \geq 0$ , conjointe à une forme  $(o, -k, a')$ , dans laquelle  $2k > a' \geq 0$  et  $\frac{b}{m} \cdot \frac{a'}{m} \equiv 1 \pmod{\frac{2k}{m}}$ . Gauss appelle réduite la forme  $(a', k, o)$  proprement équivalente à la dernière (*Disq. arith.*, 206). Comme elle a pour improprement équivalente la forme  $(c, k, o)$ , dans laquelle je désigne  $b + 2k$  par  $c$  la proposition  $ca' \equiv m^2 \pmod{2mk}$ , démontrée par Gauss (art. 210) pour deux réduites improprement équivalentes  $(c, k, o)$  et  $(a', k, o)$ , est contenue immédiatement dans la congruence que je viens de noter. D'après la même considération qu'à l'égard des formes positives, on reconnaît que les formes  $(o, k, b)$  et leurs équivalentes n'admettent aucune transformation en elles-mêmes au déterminant 1, outre  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ .

Si l'on a  $I = 0$ , les trois sommets  $\eta, \eta_1, -\xi, -\xi_1, 0, 0$  du triangle correspondant à une forme  $(a, k, b)$  sont toujours situés sur une ligne droite. Le triangle sera donc toujours obtusangle, à moins que deux des trois points ne coïncident, ce qui n'est possible que lorsque  $a = 0$ , ou  $b = 0$ , ou  $c = 0$ . Si donc on se borne à des formes primitives, c'est-à-dire à des formes dont les coefficients n'aient pas de commun diviseur, il n'y a que les formes  $(o, o, \pm 1), (\pm 1, o, o), (\pm 1, \mp 1, \pm 1)$  qui puissent être des réduites, lesquelles ont la même relation entre elles que  $(a, k, b), (c, h, a), (b, g, c)$ . On n'obtient ainsi que deux classes primitives; elles peuvent être représentées par les formes  $x^2$  et  $-x^2$ .

## III. — FORMES TERNAIRES DÉFINIES.

a. — Coefficients homogènes. Nouvelles conditions de réduction.

Pour une forme quadratique ternaire quelconque

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2gxy + 2hzy + 2kxz,$$

j'emploierai, outre de nouvelles désignations à introduire, les désignations usuelles  $\begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix} (x, y, z)$ , ou  $\begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix}$ , ou  $f(x, y, z)$ , ou  $f$ . Aux coefficients  $a, b, c$ , j'en ajoute quelquefois un quatrième,  $d$ ; aux coefficients  $g, h, k$ , trois,  $l, m, n$ . Ces dix coefficients doivent satisfaire aux quatre équations  $a + l + h + k = 0$ ,  $b + m + k + g = 0$ ,  $c + n + g + h = 0$ ,  $d + l + m + n = 0$ , de sorte que  $d = f(1, 1, 1)$ . On se fera une idée des relations qui existent entre ces dix coefficients, quand on les

réunit dans le système  $\begin{vmatrix} a & k & h & l \\ & b & g & m \\ & & c & n \\ & & & d \end{vmatrix}$ , conformément à l'ordre  $\begin{vmatrix} a & k & h \\ k & b & g \\ h & g & c \end{vmatrix}$

des coefficients ordinaires, ou bien quand on emploie, au lieu de  $g, h, k, l, m, n$ , les désignations  $[bc], [ca], [ab], [ad], [bd], [cd]$ , en quoi l'ordre de deux lettres placées entre les crochets est indifférent, de sorte que  $[bc] = [cb]$ . Les vingt-quatre formes, qui résultent de l'une d'entre elles, la forme  $f$ , par les permutations des coefficients  $a, b, c, d$  combinées avec les permutations respectives des coefficients  $g, h, k, l, m, n$ , sont équivalentes entre elles; elles se changent les unes en les

autres par les combinaisons d'une des deux substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et

$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$  avec une des trois  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ , et

une des quatre  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

Les relations entre ces vingt-quatre formes ressortent avec plus d'évidence encore quand on n'exprime ces formes que par  $g, h, k, l$ ,

m, n. En introduisant une quatrième variable, savoir  $t$ , qui d'abord doit être égale à zéro, on obtient

$$(5) \quad \begin{cases} f = -g(y-z)^2 - h(z-x)^2 - k(x-y)^2 - l(x-t)^2 \\ \quad - m(y-t)^2 - n(z-t)^2. \end{cases}$$

Comme on peut augmenter ou diminuer d'un nombre quelconque la valeur de  $t$  partant de zéro, sans altérer la valeur de la forme, si l'on augmente ou diminue du même nombre  $x$ ,  $y$  et  $z$ , les six coefficients sont homogènes entre eux. Les permutations qui résultent des vingt-quatre permutations des coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et des variables respectives  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ , et qui changent simplement l'ordre des six termes, dans l'équation (5), peuvent être caractérisées ainsi : on réunit en couple deux coefficients qui, dans le premier énoncé ci-dessus, n'appartiennent pas à la même rangée horizontale ou verticale qu'un seul des nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ou, dans le deuxième énoncé, n'ont en commun aucun des éléments  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ; ce couple n'est désuni par aucune des permutations de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Mais les trois couples de cette espèce qui, dans le système  $\begin{Bmatrix} a, b, c \\ d, m, n \end{Bmatrix}$ , forment les trois rangées verticales, peuvent être permutés à volonté entre eux, ce qui correspond aux permutations entre  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; il peut aussi se présenter des permutations des deux éléments d'un couple, mais seulement en combinaison avec la même permutation dans un autre couple, ce qui correspond aux permutations de  $d$  avec  $a$ ,  $b$  ou  $c$ , quand les deux couples se permutent simultanément entre eux.

Si l'on fixe l'ordre cyclique déterminé  $d, a, b, c$  pour ces coefficients avec celui de  $t, x, y, z, t$  pour les variables; si l'on désigne  $(t-x)$ ,  $(x-y)$ ,  $(y-z)$ ,  $(z-t)$  par  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , puis  $a$  par (34),  $b$  par (41),  $c$  par (12),  $d$  par (23), l'ordre des chiffres étant indifférent, de plus  $b+2g+c$ , ou, ce qui revient au même,  $d+2l+a$  par (13), et  $a+2k+b$  ou  $c+2n+d$  par (24), de telle sorte que de ces six quantités ayant un chiffre commun, comme par exemple (12), (13), (14), lorsqu'elles apparaissent comme coefficients extrêmes d'une des quatre formes binaires portant les numéros 1, 2, 3, 4, on obtient l'équation

$$(6) \quad \begin{cases} -f = (12)u_3u_1 + (23)u_4u_1 + (34)u_1u_2 + (41)u_2u_3 \\ \quad + (24)u_1u_3 + (13)u_2u_4, \end{cases}$$

symétrique, comme la relation  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$ , par rapport aux chiffres 1, 2, 3, 4.

Quant à la forme adjointe  $\begin{pmatrix} \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \\ \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F} \end{pmatrix}$  ou  $\mathfrak{F}$ , dont les coefficients sont les premiers sous-déterminants de l'invariant  $I$ , c'est-à-dire du déter-

minant  $\begin{vmatrix} a & k & h \\ k & b & g \\ h & g & c \end{vmatrix}$ , de sorte qu'il existe trois équations pareilles à

$I = a\mathfrak{A} + k\mathfrak{B} + h\mathfrak{C}$  et six pareilles à  $0 = a\mathfrak{D} + k\mathfrak{E} + h\mathfrak{F}$ , et qu'on a  $\mathfrak{F}(X, Y, Z) = I \cdot xX + \gamma Y + zZ = I f(x, y, z)$ , si pour  $X, Y, Z$  on place les demi-dérivées de  $f(x, y, z)$  relativement à  $x, y, z$ , nous observerons qu'elle n'est symétrique ni par rapport avec  $a, b, c, d$ , ni par rapport aux nombres introduits 1, 2, 3, 4, même après qu'elle a été complétée par les quatre coefficients  $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ , qui satisfont aux équations

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{F} + \mathfrak{H} + \mathfrak{K} = 0, \quad \mathfrak{D} + \mathfrak{M} + \mathfrak{K} + \mathfrak{G} = 0, \quad \mathfrak{C} + \mathfrak{U} + \mathfrak{G} + \mathfrak{H} = 0, \\ \mathfrak{D} + \mathfrak{F} + \mathfrak{M} + \mathfrak{U} = 0, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{F}(1, 1, 1).$$

C'est la forme  $\mathfrak{F}_1$ , qui résulte de  $\mathfrak{F}$  par la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et

dont les coefficients  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$  sont les invariants des quatre formes binaires précitées portant les numéros 1, 2, 3, 4, qui est non-seulement symétrique par rapport à ces numéros, mais encore par rapport à  $a, b, c, d$ , si l'on conserve un ordre cyclique, dans lequel  $a$  reste séparé de  $c, b$  de  $d$ . En faisant, pour abrégér,

$$\mathfrak{P}_a = gn + nm + mg, \\ \mathfrak{P}_b = nl + lh + hn, \\ \mathfrak{P}_c = lk + km + ml, \\ \mathfrak{P}_d = kg + gh + hk,$$

on obtient l'expression suivante :

$$\mathfrak{F}_1 = \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & -\mathfrak{P}_a - hm & -kn + hm & -\mathfrak{P}_d - hm \\ \mathfrak{B} & -2\mathfrak{K} + \mathfrak{A} & -\mathfrak{P}_b - hm & -gl + hm \\ & & \mathfrak{C} - 2\mathfrak{G} + \mathfrak{B} & -\mathfrak{P}_c - hm \\ & & & \mathfrak{C} \end{vmatrix}.$$

Pour que  $f$  soit une forme positive, en supposant les variables réelles aussi bien que les coefficients, il faut, quand  $I$  n'est point nul, que



$a, b, c, d, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$  et  $I$  soient positifs; mais il suffit déjà, d'après l'équation  $af = (ax + ky + lz)^2 + \mathfrak{C}y^2 - 2\mathfrak{C}yz + \mathfrak{B}z^2$ , que  $a$  et la forme binaire  $(\mathfrak{C}, -\mathfrak{C}, \mathfrak{B})$  soient positifs; donc,  $a$  et  $\mathfrak{B}$  ou deux coefficients quelconques, ayant entre eux des relations pareilles, doivent être positifs en même temps que  $I$ .

A la place des conditions de Seeber pour une forme positive réduite, savoir,  $a \leq b \leq c$ ,  $(2g) \leq b$ ,  $(2h) \leq a$ ,  $(2k) \leq a$ , auxquelles on joint, quand  $g, h$  et  $k$  sont négatifs :  $a + b + 2g + 2h + 2k \geq 0$ , j'introduis, pour mon objet, d'autres conditions de réduction, qui ne concordent au fond avec les précédentes que lorsque le premier cas se réalise, et consistent toujours en ce que, des nombres  $g, h, k, l, m, n$ , aucun ne doit être positif. Tandis qu'il résulte des conditions de Seeber, si  $f'$  est une forme équivalente à  $f$ , dans laquelle on a pareillement  $a' \leq b' \leq c'$ , que  $a'$  ne peut être  $< a$ , ni  $b' < b$ , ni  $c' < c$ , il résulte des miennes, que je dois maintenant justifier, et qui ne portent pas atteinte à la symétrie entre  $a, b, c$  et  $d$ , que  $a + b + c + d$  et  $-g - h - k - l - m - n$  ont des valeurs minima, pour toutes les formes équivalentes. Je désigne une

substitution  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ , qui doit être employée pour la forme  $f$ ,

afin de pouvoir exprimer  $d', l', m', n'$  d'une manière aussi immédiate

que  $a', b', c', g', h', k'$ , par  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$ , où  $\delta, \delta_1, \delta_2$  sont tels,

que la somme des coefficients rangés par quatre dans une ligne hori-

zontale est égale à zéro, ou aussi par  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$ ,  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3$

étant égaux à zéro. Toutefois, dans ce dernier système, on peut, pour rétablir la symétrie relativement à  $a, b, c, d$ , augmenter ou diminuer d'une seule et même grandeur tous les coefficients placés quatre par quatre dans une colonne, sans que par là le résultat de la substitution soit altéré, si l'on met, par exemple

$$a' = a\alpha^2 + b\alpha_1^2 + c\alpha_2^2 + d\alpha_3^2 + 2g\alpha_1\alpha_2 \\ + 2h\alpha_2\alpha_3 + 2k\alpha_1\alpha_3 + 2l\alpha_2\alpha_3 + 2m\alpha_1\alpha_3 + 2n\alpha_2\alpha_3, \text{ etc.},$$

$$k' = \frac{1}{2} \frac{\partial a'}{\partial \alpha} \beta + \frac{1}{2} \frac{\partial a'}{\partial \alpha_1} \beta_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial a'}{\partial \alpha_2} \beta_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial a'}{\partial \alpha_3} \beta_3, \text{ etc.}$$



Car, par exemple, si  $z, z_1, z_2, z_3$  augmentent de 1,  $\frac{1}{2} \frac{\partial a'}{\partial z}$  n'augmente que de  $a + k + h + l$ , c'est-à-dire de zéro; il en est de même des dérivées semblables; de plus, on a

$$\frac{\partial a'}{\partial z} + \frac{\partial a'}{\partial z_1} + \frac{\partial a'}{\partial z_2} + \frac{\partial a'}{\partial z_3} = 0, \text{ etc.}$$

L'application, à  $f$ , de la substitution  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ , produit la

$$\text{forme } \begin{vmatrix} a + 2h + c & k + g & n + g & l - g \\ & b & -g & m + g \\ & & c & h + g \\ & & & a + 2k + b \end{vmatrix}.$$

A la place de  $-g - h - k - l - m - n$  vient donc, dans celle-ci, un nombre plus petit de  $g$ , de sorte que cette somme peut toujours être diminuée par une substitution appropriée, toutes les fois que  $g$  ou, comme on peut le conclure d'après la symétrie, un des coefficients  $h, k, l, m, n$  est positif. Si  $l$  est positif, la substitution correspondante, par exemple, résulte de celle qui a été indiquée par l'échange de  $b$  et  $c$  contre  $a$  et  $d$ . La substitution ci-dessus

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ devient ainsi } \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \text{ ou bien, si je modifie.}$$

$$\text{de la même grandeur les termes d'une colonne, } \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Enfin, en remettant à leur place primitive  $a$  et  $d$ , qui reparaissent parmi

$$a', b', c', d', \text{ j'obtiens } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \text{ qui change } f \text{ en}$$

$$\begin{vmatrix} a & k + l & h + l & -l \\ a + 2h + c & & g - l & n + l \\ & & a + 2k + b & m + \\ & & & d \end{vmatrix}.$$

Il est, maintenant aussi, aisé de démontrer que, si  $g, h, k, l, m, n$  sont négatifs, toutes les substitutions effectuent une augmentation de la

somme  $a + b + c + d$ , excepté la substitution identique

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ou  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , et celles qui effectuent de simples permutations

entre  $a, b, c$  et  $d$ . Ayant en effet, d'après (5).

$$\begin{aligned} a' &= -g(\alpha_1 - \alpha_2)^2 - h(\alpha_2 - \alpha)^2 - k(\alpha - \alpha_1)^2 - l(\alpha - \alpha_3)^2 \\ &\quad - m(\alpha_1 - \alpha_3)^2 - n(\alpha_2 - \alpha_3)^2; \end{aligned}$$

et des expressions analogues pour  $b', c', d'$ , on reconnaît que, dans la substitution identique et les vingt-trois autres mentionnées, chacun des nombres non négatifs  $-g, -h, -k, -l, -m, -n$  entre deux fois dans la somme  $a' + b' + c' + d'$ , chaque fois multipliée par le nombre carré 1. Si, par conséquent, cette somme diminuait dans quelque forme équivalente, il faudrait qu'au moins un de ces six nombres y parût moins de deux fois. Si c'était le nombre  $-g$ , il faudrait, parmi les quatre différences  $\alpha_1 - \alpha_2, \beta_1 - \beta_2, \gamma_1 - \gamma_2, \delta_1 - \delta_2$ , que plus de deux fussent égales à zéro; leur somme étant égale à zéro, il s'ensuivrait que toutes les quatre seraient nulles, ce qui exigerait que le déterminant de la substitution fût égal à zéro. Cette somme-là ne peut donc être plus petite dans aucune forme équivalente; mais il nous reste encore à discuter les cas dans lesquels un ou plusieurs des nombres  $g, h, k, l, m, n$  sont égaux à zéro.

Si  $f$  est réduite et si  $h.m$  n'est pas plus grand que  $g.l$  ou  $k.u$ , la forme précitée  $\mathcal{F}_1$ , formée en ayant pour base la série cyclique  $d, a, b, c, d$ , est aussi réduite,  $\mathcal{G}_1, \mathcal{H}_1, \mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1, \mathcal{U}_1$  étant alors négatives ou nulles, comme on le reconnaît immédiatement d'après leurs expressions. Chaque permutation entre les nombres  $d, a, b, c, d$ , dans laquelle restent séparés deux nombres qui ne se suivent pas immédiatement et restent unis deux nombres se suivant immédiatement, entraîne après elle simplement une permutation entre les coefficients  $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{D}_1$ . Le résultat est analogue pour les cas dans lesquels  $g.l$  ou  $k.u$  ne sont

pas plus grands que les deux autres produits analogues, car on prend alors pour base la série  $\delta a b \delta$  ou  $\delta b a \delta$ . Sur les vingt-quatre formes simultanément réduites, il y en a huit dans lesquelles la forme indiquée de la classe adjointe, basée sur la série  $a b c \delta$ , est réduite; dans huit autres, c'est la forme basée sur la série  $c a b \delta$ , et dans les huit dernières c'est la forme basée sur la série  $b c a \delta$ , qui est réduite. Si l'on cherche des conditions propres à mettre en évidence comme forme représentante une des vingt-quatre formes simultanément réduites, ce qui, pour mon but, ne ferait que gêner, mais serait désirable pour des constructions de tables, les considérations précédentes font immédiatement ressortir huit formes sur les vingt-quatre. De la condition que  $\delta$  ne doit pas être plus petit que  $a$ ,  $b$  ou  $c$  résulte que, sur ces formes, deux sont mises en vue, qui se transforment l'une en l'autre à l'aide de la substitution  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  et pourraient être distinguées par la condition  $a \geq c$  ou  $g < h$ .

*b. — Les transformations des formes en elles-mêmes.*

Si la forme  $f$ , à l'aide de la substitution  $S$ , se transforme en la forme  $f'$ , et si les coefficients  $a, b, c, g, h, k$  coïncident numériquement avec les coefficients  $a', b', c', g', h', k'$ , rangés dans le même ordre, on dit : la forme  $f$  se transforme en elle-même par la substitution  $S$ . Je n'ai en vue que des substitutions au déterminant 1. Il suffit aussi de considérer ces substitutions pour des formes réduites, parce qu'elles s'en déduisent pour les autres. Si donc  $f$  est réduite et si, comme je vais premièrement le supposer,  $S$  est une des vingt-trois substitutions par lesquelles nos vingt-quatre formes résultent les unes des autres; si, de plus,  $z$  est le nombre de celles de ces vingt-quatre formes qui ont des coefficients coïncidant avec  $f$ , cette forme elle-même y compris, de sorte que  $z$  soit diviseur de 24, il faudra considérer les cas particuliers qui suivent et que l'on devra adopter comme types pour les cas analogues.

1.  $a = b$  et  $g = h$ , d'où résulte aussi que  $l = m$ . Alors  $f$  ne su-

bit aucune altération en permutant  $a$  et  $b$ ;  $S$  est donc 
$$= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

et  $z = 2$ . Ce cas est en même temps le type pour les cinq autres, dans lesquels d'autres combinaisons des quantités  $a, b, c, d$  jouent le rôle que jouent ici  $a$  et  $b$ .

2.  $a = b, c = d, g = l, h = m$ . En ce cas,  $f$  ne subit aucun changement lors de la permutation de  $c$  et  $d$  jointe à la permutation de  $a$  et  $b$ .

$S$  est alors 
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
 et  $z = 2$ . La réunion de deux tels cas, c'est-à-dire les conditions :  $g = l, h = m, k = n, a = b = c = d$ , donne  $z = 4$ .

3.  $a = b, c = d, g = h = l = m$ . Alors, sans que  $f$  soit changé,  $a$  peut se permuter avec  $b$  et, indépendamment de cela,  $c$  avec  $d$ . Les substitutions  $S$  résultent de celle qui est indiquée dans le premier cas et d'une analogue. On a  $z = 4$ .

4.  $a = b = c, g = h = k, l = m = n$ ; alors  $z$  est égal à 6; analogues sont les cas  $a = b = d, etc.$

5.  $a = b = c = d, g = h = k = l = m = n$ . Alors on a  $z = 24$ .

Mais, si  $S$  ne fait point partie de ces vingt-trois substitutions-là et que néanmoins  $f$  puisse se transformer par  $S$  en elle-même, c'est-à-dire en une forme pareillement réduite, il n'est pas possible que tous les nombres  $g, h, k, l, m, n$  soient différents de zéro; il y a donc plus de vingt-quatre formes réduites. Soit  $\lambda$  le nombre de celles d'entre elles dont les coefficients coïncident avec ceux de  $f$ . Si maintenant :

6.  $h$  seul est égal à zéro, de sorte que vingt-quatre autres formes soient réduites, dont l'une,  $f'$ , résulte de  $f$  par la substitution

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
 et a  $\begin{Bmatrix} n, o, k \\ l, m, g \end{Bmatrix}$  à la place des coefficients homogènes  $\begin{Bmatrix} g, o, k \\ l, m, n \end{Bmatrix}$ ; alors on a  $\lambda = z$ , quand  $g$  diffère de  $n$  et  $k$  de  $l$ ; par contre,

$\lambda = 2z$  si  $g = n$  ou  $k = l$ , cas dans lequel  $z$  formes des vingt-quatre premières réduites coïncident avec  $z$  des vingt-quatre autres. Des conditions symétriques entre  $a, b, c, d$  sont, par la condition que  $h$  seul doit être égal à zéro, exclues les conditions symétriques entre  $a$  et  $b$ .

b et c,  $\delta$  et a,  $\delta$  et c. En revanche, f peut ne pas se modifier lors de la permutation de a et c ou de celle de b et  $\delta$ , ou des deux permutations qui le prescrit, quand on a respectivement  $g = k$ ,  $l = n$  ou  $g = n$ ,  $k = l$  ou  $g = l$ ,  $k = n$  ou  $g = k = l = n$ . Outre la valeur 1, z peut donc aussi prendre les valeurs 2 et 4.

7. Si  $h = m = 0$ , de sorte que 3.24 formes soient réduites, dont trois, y compris f même, se transforment cycliquement en elles-mêmes

par la substitution  $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ , par quoi les coefficients  $\begin{Bmatrix} g, o, k \\ l, o, n \end{Bmatrix}$

se changent en  $\begin{Bmatrix} k, o, l \\ g, o, n \end{Bmatrix}$  et  $\begin{Bmatrix} l, o, g \\ k, o, n \end{Bmatrix}$ , alors  $\lambda = 1, 2, 4, 6$  ou  $24$ , suivant que, parmi les nombres g, k, l, n, il n'y a pas d'égaux, ou un couple d'égaux, ou deux couples d'égaux, ou trois égaux, ou que tous les quatre soient égaux entre eux.

8. Si  $h = k = 0$ , il y a 6.24 formes réduites. Six d'entre elles, parmi lesquelles f, résultent cycliquement les unes des autres au moyen de

la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ , que je désigne par S. Les coefficients

homogènes  $\begin{Bmatrix} g, o, o \\ l, m, n \end{Bmatrix}$  restent invariables quand on emploie la substitution

$S^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ , et se transforment, par S et  $S^{-2}$ , en

$\begin{Bmatrix} n, o, o \\ l, g, m \end{Bmatrix}$ , par  $S^2$  et  $S^{-1}$  en  $\begin{Bmatrix} m, o, o \\ l, n, g \end{Bmatrix}$ . On a donc  $\lambda = 2$ , s'il n'y a pas une condition ultérieure de remplie;  $\lambda = 4$ , pourvu qu'on ait seulement  $m = n$ , ou seulement  $g = m$ , ou seulement  $n = g$ ;  $\lambda = 12$  quand  $g = m = n$ . Enfin et en dernier lieu :

9. Il faut encore tenir compte des cas dans lesquels trois des nombres g, h, k, l, m, n sont égaux à zéro. Soit  $g = h = k = 0$ . Il y a alors 4 fois 4.24 formes de réduites. Au premier groupe de 4.24 appartiennent la forme f et celles qui en résultent par les substitutions

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ , et dont les coefficients coïncident. Au deuxième groupe de 4.24 appartiennent les

quatre formes résultant de la forme  $f$  et des trois autres précitées par la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$  qui coïncident entre elles. Il en est de même des troisième et quatrième groupes de 4.24 si, dans la dernière substitution, on permute cycliquement les lignes horizontales. Pour toutes ces 4.4.24 formes, on a  $\lambda = 4, 8$  ou  $24$ , suivant que  $a, b, c$  sont tous différents ou que deux d'entre eux ou tous les trois sont égaux entre eux. Comme dans les 3.4.24 dernières formes, parmi les coefficients qui remplacent  $\begin{Bmatrix} a, b, k \\ l, m, n \end{Bmatrix}$ , deux, qui sont rangés verticalement, et un autre, deviennent égaux à zéro, tandis que les trois autres prennent les valeurs arbitraires  $l, m, n$ ; j'ai tranché la question concernant, ainsi que tous les cas exceptionnels possibles relativement à des formes positives. La simplification que j'ai obtenue, dans ce qui précède, comparativement à l'exposé d'Eisenstein, est due à ce que mes conditions de réduction sont plus conformes à la nature des choses.

### c. — Relations géométriques.

Si l'on désigne symboliquement par  $(a)$ , relativement à sa grandeur et à sa position, une longueur rectiligne dans l'espace, dont les projections soient sur trois axes rectangulaires  $\xi, \xi_1, \xi_2$ , et, semblablement, par  $(b)$  et  $(c)$  des longueurs dont les projections soient sur les mêmes axes  $\eta, \eta_1, \eta_2$  et  $\zeta, \zeta_1, \zeta_2$ , l'ensemble des extrémités des longueurs partant d'un même point initial et devant être désignées symboliquement par  $x(a) + y(b) + z(c)$ , où  $x, y$  et  $z$  expriment tous des nombres entiers, représente un système de points ordonnés parallèlement. En entendant, par le produit de deux longueurs pareilles, le produit de leurs longueurs absolues multiplié par le cosinus de leur différence de direction, expression symbolique déjà employée dans les *OEuvres posthumes de Gauss* (t. II, p. 305), et qui peut aussi s'énoncer par les quaternions d'Hamilton, alors le carré de la longueur  $x(a) + y(b) + z(c)$ , identique au carré de la longueur absolue, est égal à  $\begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix} (x, y, z)$ , si l'on désigne les carrés des longueurs

(a)(b)(c) par a, b, c, et les produits de ces longueurs, prises deux à deux, par g, h, k. L'exactitude de cette assertion résulte des équations

$$(7) \begin{cases} \xi^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 = a, & \eta^2 + \eta_1^2 + \eta_2^2 = b, & \zeta^2 + \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = c, \\ \eta\xi + \eta_1\xi_1 + \eta_2\xi_2 = g, & \zeta\xi + \zeta_1\xi_1 + \zeta_2\xi_2 = h, & \xi\eta + \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 = k, \end{cases}$$

qui, même non symboliquement, donnent le même résultat. On peut démontrer de la même manière que,  $\left( \begin{smallmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{smallmatrix} \right) (\alpha, \alpha_1, \alpha_2)$  étant désigné par a', on a

$$[\alpha(a) + \alpha_1(b) + \alpha_2(c)] [\beta_1(a) + \beta_2(b) + \beta_3(c)] = \frac{\partial a'}{\partial \alpha_1} \frac{\beta_1}{2} + \frac{\partial a'}{\partial \alpha_2} \frac{\beta_2}{2} + \frac{\partial a'}{\partial \alpha_3} \frac{\beta_3}{2} + \dots,$$

et l'on reconnaît que, si la forme f se change en la forme f' par la

substitution  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ , dont le déterminant est, comme toujours,

supposé égal à 1, les coefficients de f' ont les mêmes relations avec le système des points que ceux de f, pourvu qu'on s'imagine ses points reliés par d'autres lignes. Il résulte, de l'équation

$$I = \begin{vmatrix} a & k & h \\ k & b & g \\ h & g & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix}^2,$$

que six fois les volumes des trois tétraèdres déterminés par les arêtes consécutives (a)(b)(c), (b)(c)(a) et (c)(a)(b) sont  $= \pm \sqrt{I}$ ; ceux des trois tétraèdres déterminés par les arêtes consécutives (a)(c)(b), (c)(b)(a) et (b)(a)(c) sont  $= \mp \sqrt{I}$ .

Je pose toujours  $\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} = +\sqrt{I}$ .

Je désigne les premiers sous-déterminants de ce déterminant par  $\Xi, \Xi_1, \Xi_2, \Pi, \Pi_1, \Pi_2, Z, Z_1, Z_2$ , de sorte que  $\xi_2\Xi_2 + \eta_2\Pi_2 + \zeta_2 Z_2 = \sqrt{I}$

et que  $\begin{vmatrix} \Xi & \Pi & Z \\ \Xi_1 & \Pi_1 & Z_1 \\ \Xi_2 & \Pi_2 & Z_2 \end{vmatrix} = I$ . Si l'on désigne symboliquement par  $(\mathfrak{A})$  un

fragment de plan, déterminé quant à son aire et à sa position, et dont les projections perpendiculaires aux trois axes sont  $\Xi, \Xi_1, \Xi_2$ ; si l'on agit de même par analogie avec  $(\mathfrak{B}), (\mathfrak{C})$ ; si, de plus, on en-

tend par prodnt de deux tels fragments de plan le produit de leur aire multiplié par le cosinus de leur différence de direction, on obtient

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}).(\mathfrak{A}) &= \mathfrak{A}, & (\mathfrak{B}).(\mathfrak{B}) &= \mathfrak{B}, & (\mathfrak{C}).(\mathfrak{C}) &= \mathfrak{C}, & (\mathfrak{B}).(\mathfrak{C}) &= \mathfrak{G}, \\ (\mathfrak{C}).(\mathfrak{A}) &= \mathfrak{H}, & (\mathfrak{A}).(\mathfrak{B}) &= \mathfrak{K}. \end{aligned}$$

comme il résulte des équations

$$(8) \begin{cases} \Xi^2 + \Xi_1^2 + \Xi_2^2 = \mathfrak{A}, & \Pi^2 + \Pi_1^2 + \Pi_2^2 = \mathfrak{B}, & Z^2 + Z_1^2 + Z_2^2 = \mathfrak{C}, \\ \text{HZ} + \Pi_1 Z_1 + \Pi_2 Z_2 = \mathfrak{G}, & Z\Xi + Z_1 \Xi_1 + Z_2 \Xi_2 = \mathfrak{H}, \\ \Xi\Pi + \Xi_1 \Pi_1 + \Xi_2 \Pi_2 = \mathfrak{K}. \end{cases}$$

Ces mêmes équations montrent que  $\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{H} & \mathfrak{G} \\ \mathfrak{H} & \mathfrak{B} & \mathfrak{G} \\ \mathfrak{G} & \mathfrak{G} & \mathfrak{C} \end{vmatrix} = I^2$ .

Avec la substitution  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ , on a

$$\begin{aligned} \xi'_s &= \alpha \xi_s + \alpha_1 \eta_s + \alpha_2 \zeta_s, & \eta'_s &= \beta \xi_s + \beta_1 \eta_s + \beta_2 \zeta_s, \\ \zeta'_s &= \gamma \xi_s + \gamma_1 \eta_s + \gamma_2 \zeta_s, \end{aligned}$$

ou, sommairement,

$$\begin{aligned} (a') &= \alpha(a) + \alpha_1(b) + \alpha_2(c), & (b') &= \beta(a) + \beta_1(b) + \beta_2(c), \\ (c') &= \gamma(a) + \gamma_1(b) + \gamma_2(c). \end{aligned}$$

Si l'on met les expressions pour  $\xi'_s$ ,  $\eta'_s$ ,  $\zeta'_s$  dans l'équation  $\xi'_s \Xi'_s + \eta'_s \Pi'_s + \zeta'_s Z'_s = \sqrt{I}$ , la considération des expressions multipliées par  $\xi_s$ ,  $\eta_s$ ,  $\zeta_s$  donnera les équations

$$\begin{aligned} \Xi_s &= \alpha \Xi'_s + \beta \Pi'_s + \gamma Z'_s, & \Pi_s &= \alpha_1 \Xi'_s + \beta_1 \Pi'_s + \gamma_1 Z'_s, \\ Z_s &= \alpha_2 \Xi'_s + \beta_2 \Pi'_s + \gamma_2 Z'_s, \end{aligned}$$

ou, sommairement,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}) &= \alpha(\mathfrak{A}') + \beta(\mathfrak{B}') + \gamma(\mathfrak{C}'), & (\mathfrak{B}) &= \alpha_1(\mathfrak{A}') + \beta_1(\mathfrak{B}') + \gamma_1(\mathfrak{C}'), \\ (\mathfrak{C}) &= \alpha_2(\mathfrak{A}') + \beta_2(\mathfrak{B}') + \gamma_2(\mathfrak{C}'). \end{aligned}$$

La différence des directions de deux plans dépend des directions



de circuits que l'on admet comme positives dans les plans. Si l'on admet ces directions comme telles, que la ligne commune à deux plans, considérée comme limite d'aires fermées situées toutes d'un seul côté de cette ligne dans les deux plans, fasse son parcours, dans les deux, en des sens opposés, l'angle cherché est celui qui est compris entre deux droites, dans l'intérieur des aires fermées, perpendiculaires à la ligne commune, desquelles droites l'une finit et l'autre commence à cette ligne. Pour tous les plans d'un polyèdre fermé, on peut admettre de telles directions de circuit qu'entre deux plans ayant une arête commune la condition indiquée soit remplie. C'est seulement en admettant cela que l'on trouve que la somme des projections de toutes ces positions de plans dans un plan quelconque est égale à zéro. Ainsi  $\mathfrak{H}$  précité a le signe du cosinus de l'angle que forme le plan du triangle complètement déterminé par  $[-a], +[b]$  avec le plan du triangle  $[-b], +[c]$  quand, suivant l'usage, on fait partir du même point les lignes  $+a, +b$  et  $+c$ . Si  $f$  est réduite, d'après ma définition, pour l'ordre  $\delta, a, b, c, \delta$ , de sorte que les différences de directions de deux lignes tant adjacentes qu'opposées du quadrilatère non plan  $(a)(b)(c)(\delta)$  sont des angles obtus ou droits et qu'en outre  $h.m$  n'est pas plus grand que  $g.l$  ou  $k.n$ , alors les différences de directions de deux plans de tétraèdres, sur lesquels se trouvent les côtés  $\delta$  et  $a, (a$  et  $b, (b$  et  $c, (c$  et  $\delta$ , sont des angles obtus ou droits, parce que les coefficients  $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{A}, \mathfrak{F}, \mathfrak{M}, \mathfrak{U}$ , de la forme  $\mathfrak{F}$ , sont négatifs ou nuls. Les directions de circuit  $y$  sont déterminées, non par  $[+a], +[b]$ ,  $[+b], +[c]$ , ..., mais d'après la règle donnée plus haut. Si par exemple ici, où toujours le point initial d'un côté coïncide avec le point final d'un autre, la face  $\mathfrak{C}$  est déterminée comme  $[+a], +[b]$ , il faudra prendre, pour  $\mathfrak{A}$ ,  $[-b], +[b+c]$ , ou, ce qui donne le même résultat,  $[-b], +[c]$ . Mais la projection de  $(a$ , perpendiculaire sur  $(b$ , a comme projections, sur les trois axes,  $\xi - \frac{k}{b}\gamma_1, \xi_1 - \frac{k}{b}\gamma_1, \xi_2 - \frac{k}{b}\gamma_2$ ; la projection de  $(c$ , perpendiculaire sur  $(b$ , celles de  $\zeta - \frac{g}{b}\gamma_1, \zeta_1 - \frac{g}{b}\gamma_1, \zeta_2 - \frac{g}{b}\gamma_2$ . Le cosinus de la différence des directions de ces deux lignes multiplié par le produit de leurs longueurs absolues est donc  $h - \frac{g^2}{b}$ : le même

cosinus, multiplié par le produit des valeurs absolues des deux aires, a pour valeur  $-\mathfrak{H}$ .

La propriété que possède le quadrilatère  $(a)(b)(c)(d)$  appartient aussi au quadrilatère  $(c)(b)(a)(d)$ , qui lui est égal, mais non superposable. Les formes qui correspondent à deux quadrilatères, ayant les mêmes rapports que les deux précédents, se transforment l'une

en l'autre à l'aide de la substitution  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  au déterminant  $-1$ ;

mais le déterminant  $-1$  se change en déterminant  $+1$ , si l'on change dans leurs opposés les signes de tous les coefficients et les directions des longueurs, de sorte que cette différence essentielle pour les quadrilatères disparaît dans les formes. Les formes correspondant aux quadrilatères  $(b)(c)(a)(d)$  et  $(c)(a)(b)(d)$ , ainsi qu'aux quadrilatères  $(a)(c)(b)(d)$  et  $(b)(a)(c)(d)$ , qui leur sont égaux, mais non superposables, ne sont point réduites en ce qui regarde l'ordre des coefficients. Au moyen de trois plans, qui sont déterminés par la diagonale principale  $(d)$  et les sommets non reposant sur  $(d)$ , d'un parallélépipède déterminé par les arêtes  $(a)$ ,  $(b)$ ,  $(c)$ , ce parallélépipède est divisé en ces six tétraèdres précédemment indiqués et qui résultent les uns des autres par permutations entre  $(a)$ ,  $(b)$  et  $(c)$ , et dont on voit que deux seulement, opposés l'un à l'autre, peuvent avoir toutes leurs arêtes saillantes. Quant aux six espèces de triangles, situés sur les faces des tétraèdres, aucun d'eux ne peut être obtusangle en cas de réduction, parce qu'alors aucun des nombres  $g$ ,  $h$ ,  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$  n'est positif et que par conséquent  $a$  et  $b$  ne sont pas plus petits que  $-k$ , etc.

Pour la signification géométrique des équations (5) et (6), je dirai encore que l'on peut considérer la longueur déterminée par  $x(a) + \gamma(b + zc)$ , aussi bien que la longueur  $x(a) + \gamma(b) + z(c) + t(d)$ , soit que l'on admette que  $t = 0$ , soit que l'on augmente ou diminue d'un seul et même nombre  $x$ ,  $\gamma$ ,  $z$  et  $t$ . Si l'on se figure les points du système rangés sur des plans parallèles à la face  $[(d), (a)]$  correspondante à l'indice 3 employé ci-dessus, le  $u_3$ , employé plus haut désignera le nombre des couches séparées par ces plans et coupées par la longueur  $x(a) + \gamma(b) + z(c) + t(d)$ , ce nombre étant compté comme

positif à partir de la face tétraédrique  $[\mathfrak{d}, \mathfrak{a}]$  vers le côté sur lequel est couché le tétraèdre lui-même. Comme, par analogie, la même chose est applicable à  $u_4$  et que  $(12)$  désigne la distance des points sur la ligne d'intersection des plans 1 et 2, on reconnaît la signification du terme  $(12) u_3 u_4$ , comme aussi des autres termes de l'équation (6). Cette proposition géométrique se trouve dans des remarques posthumes de Gauss (*OEuvres*, t. II, p. 307).

Un rôle important est joué, dans la suite, par les cas particuliers étudiés dans la section précédente, alinéas 7 et 8. Dans le dernier, ( $\mathfrak{a}$ ) est perpendiculaire sur ( $\mathfrak{A}$ ); dans le premier, chaque côté du quadrilatère est perpendiculaire à son côté opposé; le tétraèdre a par conséquent la propriété, élucidée par Lagrange et plus récemment par M. Borchardt (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1865 et 1866; *Rapports mensuels de Berlin*, juin 1872) et par M. Kronecker (*Rapports mensuels de Berlin*, juin 1872), d'avoir le plus grand volume possible, étant données les aires des faces. La condition  $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}_1 = 0$  indique, par analogie, que chaque face du tétraèdre est perpendiculaire à sa face opposée ou, suivant le langage usuel, que les angles dièdres sont droits à deux arêtes opposées; il en résulte pareillement que le tétraèdre a le plus grand volume possible, étant données les longueurs des quatre autres arêtes. Si l'on tient à ne pas quitter la configuration ordinaire des formes et cependant à ne pas détruire la symétrie entre  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{b}$ ,  $\mathfrak{c}$ ,  $\mathfrak{d}$ , on peut appliquer à  $\mathfrak{f}$  la substitution

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
 au déterminant 2 qui, d'après ce qui précède, est identique avec la substitution 
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$
. Donc la permutation de  $\mathfrak{a}$

et  $\mathfrak{d}$  n'effectue autre chose que l'application de la substitution

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
 à la forme naissante. Ce changement a de l'analogie avec celui qu'a utilisé M. Borchardt (*Mémoires de Berlin*, 1865, p. 7).

laquelle repose sur l'application de la substitution 
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
 à la

forme  $f_1$ , et, conséquemment, de la substitution adjointe  $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

à la forme adjointe  $\mathcal{F}_1$ , et qui rétablit la même symétrie relativement aux chiffres 1, 2, 3, 4, utilisés plus haut. Dans la première transformation, les arêtes (a), (b), (c) d'un parallélépipède sont remplacées par les diagonales (b) + (c), (c) + (a), (a) + (b) des faces latérales; dans la seconde, les arêtes (a<sub>1</sub>), (b<sub>1</sub>), (c<sub>1</sub>) d'un parallélépipède, parmi les principales diagonales duquel se trouve (d<sub>1</sub>), sont remplacées par les trois autres diagonales principales du même parallélépipède [\*].

Comme l'équation fondamentale et les autres les plus simples de la Trigonométrie sphérique sont contenues dans celles-ci :

$$\mathcal{C} = h\mathcal{K} - a\mathcal{G}, \quad I = \frac{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{H}^2}{b} = \frac{\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{H}^2}{c}, \quad \mathcal{K}\mathcal{H} + b\mathcal{C} + g\mathcal{C} = 0,$$

de même les parties purement géométriques de la cristallographie sont contenues dans la théorie précédente, puisqu'on peut supposer, dans les substances cristallisées, des points parallélépipédiquement ordonnés, abstraction faite d'autres points pareils (voir BRAVAIS, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXIX; 1849). Si, suivant Miller, d'après les citations dans le *Manuel de Minéralogie* de Des Cloizeaux,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  désignent les paramètres d'une face, tandis que les axes du type sont désignés, en direction et longueur, par (a), (b), (c), cette face sera représentée par  $u(\mathcal{A}) + v(\mathcal{B}) + w(\mathcal{C})$ .

Si  $\mathcal{F}$  se change en  $\mathcal{F}'$  par une substitution dont les deux premières colonnes sont  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ , le cosinus de l'angle dièdre formé par ( $\mathcal{A}'$ ) et ( $\mathcal{B}'$ ) est  $\frac{\mathcal{H}'}{\sqrt{\mathcal{A}' \cdot \mathcal{B}'}}$ , la tangente de cet angle est  $\frac{\sqrt{I'}}{\mathcal{H}'}$ , l'arête commune aux deux faces ou l'axe de la zone est

$$\begin{vmatrix} v & v' \\ w & w' \end{vmatrix} \cdot (\mathbf{a}) + \begin{vmatrix} w & w' \\ u & u' \end{vmatrix} \cdot (\mathbf{b}) + \begin{vmatrix} u & u' \\ v & v' \end{vmatrix} \cdot (\mathbf{c}).$$

La relation posée par Carnot entre les cosinus des six angles dièdres

---

[\*] L'article qui suit a été remis à la rédaction en juin 1875, et rien n'en a été changé depuis.

formés par quatre faces et dont cinq suffisent pour déterminer le type

est donnée par 
$$\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{f} & \mathfrak{g} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{f} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & \mathfrak{M} \\ \mathfrak{g} & \mathfrak{C} & \mathfrak{C} & \mathfrak{N} \\ \mathfrak{c} & \mathfrak{M} & \mathfrak{N} & \mathfrak{D} \end{vmatrix} = 0, \text{ de même que, pour les angles}$$

d'un quadrilatère non plan, par 
$$\begin{vmatrix} a & k & h & t \\ k & b & g & m \\ h & g & c & n \\ t & m & n & d \end{vmatrix} = 0, \text{ si l'on divise les}$$

lignes et colonnes d'une part par  $\sqrt{\mathfrak{A}}, \sqrt{\mathfrak{B}}, \sqrt{\mathfrak{C}}, \sqrt{\mathfrak{D}}$ , et de l'autre par  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d}$ . Les mineurs des déterminants ainsi obtenus donnent les rapports entre les quatre premières et entre les quatre secondes quantités. Si, en effet, il est vrai, comme je le lis dans les *Éléments de Cristallographie* de Naumann, Leipzig, 1856, p. 54 et suiv., qu'il serait pour toutes les formes cristallines une loi générale confirmée par toutes les observations, que les tangentes des angles dièdres formés par les faces d'une même zone soient en rapports rationnels, il devrait en être de même pour tous les coefficients des formes quadratiques ternaires correspondantes. Mais, abstraction faite du système cubique, si cette loi était rigoureusement exacte pour une température, elle ne pourrait pas l'être généralement pour les voisines, à cause de l'inégalité de la dilatation. La vraie loi est que tous les rapports anharmoniques pour lesdits angles dièdres sont rationnels. Il en est de même pour les angles plans qui sont possibles en une face, comme le dit Gauss en d'autres mots dans ses remarques posthumes (*OEuvres*, t. II, p. 308).

Les types cristallins peuvent être déterminés par les formes réduites  $f$  ou  $\mathfrak{F}_1$ . Les tétraèdres correspondants, se changeant les uns en les

autres par les substitutions 
$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$
 ne représentent que des

formes hémihédriques. Le nombre  $\lambda$ , identique à  $z$  dans les cas 1 à 5 de III,  $b$ , indique le nombre de fois que ces tétraèdres coïncident avec eux-mêmes. Tandis que la forme générale correspond au système du prisme doublement oblique, on obtient, au cas 1 de III,  $b$ , comme type, un prisme rhomboïdal oblique, dont les arêtes sont (a) et (b) avec (c) ou (d), d'où résulte, pour  $\mathfrak{F}_1$ , le cas  $\mathfrak{M}_1 = 0$ ,  $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_1$ , appartenant à 6 de III,  $b$ , ou, si l'on avait  $a = c$ ,  $g = k$ , le cas  $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{M}_1$ .

$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{U}_1$ , appartenant à 2. On obtient le même système aux cas de 2,  $g = l$ ,  $h = m$  ou  $g = l$ ,  $k = n$  entraînant respectivement, pour  $\mathfrak{F}_1$ , les cas 1 ou 2. Le cas  $g = l$ ,  $h = m$ ,  $k = n$  offre trois axes rectangulaires

moeynant la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ . De même le cas 3, entraînant

pour  $\mathfrak{F}_1$  des cas mentionnés sous 6 et 2, donne un prisme rhomboïdal droit aux arêtes (a), (b) et (c) — (d). Les cas 4 et 5 entraînant, pour  $\mathfrak{F}_1$ , les deux derniers cas 7, conduisent au système rhomboédrique, (d) étant l'axe principal; et au cubique, (a), (b), (c), (d) étant les diagonales du cube. Les cas  $\lambda = 2, 4$  et 12, compris dans 8, conduisent au système clinorhombique, le rhombique et l'hexagonal; enfin, les cas  $\lambda = 4, 8, 12$  de 9 au système rhombique, quadratique, cubique. La condition  $h = 0$ , du cas 6, a été posée comme caractère d'un nouveau système *diclinique* par M. Schrauf (*Minéralogie physique*, 1, Vienne, 1866), et la condition  $\mathfrak{H}_1 = 0$  l'était par Mitscherlich et M. Naumann (au lieu cité et *Éléments de Minéralogie*, 9<sup>e</sup> éd., 1874); mais ni celles-ci, ni même les conditions de 7,  $h = m = 0$  ou  $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{U}_1 = 0$ , ne donnent aucune symétrie ultérieure en espace si pour toutes ou pour une partie des réduites on a  $\lambda = \alpha$ . Dans le cas  $h = 0$ ,  $g = n$ , on obtient comme type un prisme rhomboïdal oblique aux couples d'arêtes symétriques (b) et (b) + (c) ou (d) et (d) + (c), qui deviennent aussi symétriques entre eux et amènent le système rhombique ou quadratique si l'on a de plus  $l = k$  ou  $g = k = l = n$ . Le cas  $h = m = 0$ ,  $g = k = l$  donne un rhomboèdre aux faces ( $\mathfrak{A}_1$ ), ( $\mathfrak{B}_1$ ), ( $\mathfrak{C}_1$ ), et un tétraèdre régulier pour  $g = k = l = n$ .

(A suivre.)

*Sur le raccordement de deux alignements droits d'une ligne  
de chemin de fer horizontale ;*

PAR M. J. COLLET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.

Lorsqu'un train de chemin de fer circule sur une voie courbe, la force centrifuge tend à produire le renversement des voitures en même temps que leur déplacement suivant le prolongement du rayon de courbure de la voie. La pesanteur s'oppose, jusqu'à un certain point, au premier de ces mouvements; et, pour qu'elle soit efficace aussi contre le second, on donne au rail extérieur un *surhaussement* ou *dévers* en rapport avec la courbure de la ligne et les limites de vitesse des trains.

Quant à la façon dont s'opère le passage de l'alignement droit à la courbe, quant à la loi de distribution des dévers dans le raccordement, la méthode suivie varie avec les Compagnies.

Nous nous proposons ici de chercher *comment doit être établi le raccordement de deux alignements droits horizontaux d'une ligne de chemin de fer pour que la stabilité des wagons soit assurée*; et, dans ce but, nous calculerons d'abord les réactions exercées sur les roues d'un wagon par les rails d'une voie horizontale de forme quelconque.

I.

Considérons une voiture à quatre roues.

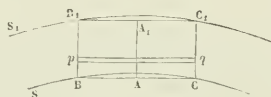
Nous ferons abstraction, dans le calcul, d'abord des changements de position relative que l'inégale flexion des ressorts peut faire éprou-



ver au centre de gravité du wagon ; puis, des petits déplacements perpendiculaires à la voie résultant de la forme conique des jantes des roues et de la petite différence qui existe entre la largeur de la voie entre rails et la distance extérieure des rebords ou *boudins* des roues accouplées, déplacements qui n'ont d'ailleurs pour effet que de modifier le dévers d'une quantité très-petite par rapport à lui-même. Par suite on supposera constantes et égales les circonférences de contact des roues sur les rails.

Les dimensions du wagon étant toujours très-petites par rapport au rayon de courbure de la voie, on peut supposer que le quadrilatère  $BC C_1 B_1$  (*fig. 1*), ayant pour sommets les points de contact des roues et

Fig. 1.

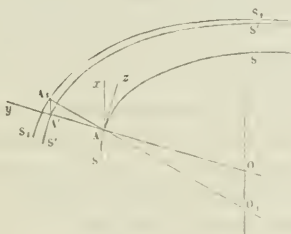


des rails, est un rectangle dont les côtés opposés  $BC$ ,  $B_1 C_1$  sont horizontaux et se confondent sensiblement avec les arcs qu'ils sous-tendent, la très-faible inclinaison de  $B_1 C_1$  étant composée, pour le wagon, par l'inégale flexion des ressorts. Alors, à un instant quelconque, le système peut être considéré comme animé d'un mouvement de rotation autour de la verticale qui passe par le centre de courbure de l'arc intérieur  $BC$ , en même temps qu'il tourne d'une manière continue autour de la tangente à ce rail, soit autour de la corde  $BC$ , et que les roues effectuent leurs révolutions relatives autour de leurs centres respectifs ; donc tous les points situés dans un prisme infiniment mince  $pq$ , parallèle à  $BC$ , seront dans un état identique, et, en supposant que tout soit symétrique par rapport au plan perpendiculaire au milieu de  $BC$  et dont la trace est  $AA_1$ , on pourra supposer toute la masse du prisme  $pq$  réunie à son centre de gravité situé dans le plan  $AA_1$ , qu'il suffira de considérer seul en lui attribuant ainsi une masse égale à celle de la partie invariable de la voiture. On fera une réduction analogue pour les systèmes de roues et d'essieux, en les remplaçant par un système unique semblable aux précédents, mais de masse double en chaque point, et ayant son axe dans le plan  $AA_1$ .



Soient (fig. 2)  $S$  le rail plan,  $O$  son centre de courbure pour un point  $A$ ,  $S_1$  le rail en dévers, extérieur au premier, et  $S'$  la projection de  $S_1$  sur le plan du rail  $S$ . Si l'on mène en  $A$  le plan vertical normal à la courbe  $S$ , il coupera  $S_1$  et  $S'$  respectivement en  $A_1$  et  $A'$ , ce dernier point, projection du précédent, étant d'ailleurs sur le prolongement  $AO$  du rayon de courbure  $OA$  au point  $A$  de la courbe  $S$ . Si l'on imagine le système d'axes rectangulaires formé par la verticale  $Ax$ , la normale  $Ay$  et la tangente  $Az$  à la courbe  $S$ , on pourra à chaque instant considérer ces trois axes comme animés d'un mouvement de rotation autour de l'axe instantané vertical  $OO_1$ , mené par le centre de courbure de la courbe  $S$ , en même temps que le wagon, où le plan  $AA_1$  avec son

Fig. 2.



système unique de roues, entraîné dans le mouvement du système  $Axyz$ , possède un mouvement de rotation autour de  $Az$  et que les roues et l'essieu tournent en outre autour d'un axe parallèle à  $AA_1$ , ou, par approximation, parallèle à  $Ay$ , l'angle  $A_1Ay$  étant très-petit.

Nous sommes ainsi ramenés à une étude de mouvement relatif.

Le mouvement relatif par rapport aux axes  $Axyz$  est identique à un mouvement absolu rapporté aux mêmes axes supposés fixes, et qui serait produit par les forces réellement appliquées et par des forces fictives qui sont, pour chaque point, respectivement égales et contraires à la force d'entraînement et à la force centrifuge composée. Ces forces sont dirigées suivant les accélérations de même nom, et ont chacune pour mesure le produit de l'accélération correspondante par la masse du point considéré. On sait que l'accélération centrifuge composée a pour valeur  $2\Omega v \sin \delta$ ,  $\Omega$  étant la vitesse instantanée de rotation du système

par rapport auquel le mouvement relatif est considéré,  $v$ , la vitesse relative du point par rapport à ce système, et  $\delta$  l'angle de la vitesse relative et de l'axe instantané. Quant à sa direction, si l'on mène par le point des droites parallèles à l'axe instantané et à la vitesse relative, dans le même sens respectivement, l'accélération centrifuge composée est perpendiculaire au plan de ces deux droites dans la direction suivant laquelle devrait être placé un observateur qui aurait les pieds dans le plan, et qui, regardant l'angle des deux directions ci-dessus définies, aurait à sa gauche la parallèle à l'axe instantané, et à sa droite la vitesse relative.

Si l'on introduit les réactions des rails, on pourra considérer le système comme libre, et, appliquant le principe de d'Alembert à son mouvement relatif, on exprimera qu'il ne fait que tourner autour du point A relativement fixe, en écrivant que toutes les forces appliquées, réelles, fictives et d'inertie, transportées parallèlement à elles-mêmes en A, ont une résultante nulle, l'équation du mouvement autour de Az étant d'ailleurs obtenue en égalant à zéro la somme algébrique des moments des couples que fait naître la translation précédente des forces en A.

Passons au développement du calcul, et soient

V la vitesse du wagon supposée constante ;

M la masse totale du wagon, des roues et des essieux ;

M<sub>1</sub> la masse des roues et des essieux ;

$r$  le rayon des roues ;

$\rho$  le rayon de courbure de la courbe S en A (fig. 2) ;

I le rayon de gyration du wagon autour de Az ;

I<sub>0</sub> le rayon de gyration autour d'une parallèle à Az menée par le centre de gravité du wagon ;

G (fig. 3) le centre de gravité de tout le wagon ;

h la hauteur de ce centre au-dessus de AA<sub>1</sub> ;

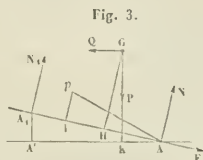
2l la largeur AA<sub>1</sub> de la voie ;

$\omega$  l'angle variable A<sub>1</sub>AA' ;

F la somme des composantes suivant A<sub>1</sub>A des réactions des rails ;

N et N<sub>1</sub> les composantes des mêmes réactions perpendiculairement à AA<sub>1</sub> dans le plan AA<sub>1</sub>A'.

Pour chacune des forces, nous calculerons ses composantes suivant  $AA_1$  et  $AN$ , ainsi que son moment par rapport au point A, moment qu'on prendra avec le signe + ou le signe -, suivant que la force tendra à augmenter ou à diminuer l'angle  $\omega$ .



La pesanteur  $P = Mg$ , appliquée au centre de gravité G, donne ainsi, pour ses composantes et son moment,

$$- Mg \sin \omega, \quad - Mg \cos \omega, \quad - Mg(l \cos \omega - h \sin \omega).$$

La pression N ne donne pas de couple, tandis que la pression  $N_1$  donne le couple  $+ 2lN_1$ .

L'accélération d'entraînement peut être pour tous les points supposée égale à  $\frac{V^2}{\rho}$  et dirigée parallèlement à  $A'A$ ; la résultante des forces égales et contraires aux forces d'entraînement sera une force  $Q = M \frac{V^2}{\rho}$ , appliquée en G, dirigée dans le sens  $AA'$ , et dont les composantes et le moment auront pour valeurs respectivement

$$+ M \frac{V^2}{\rho} \cos \omega, \quad - M \frac{V^2}{\rho} \sin \omega, \quad - M \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega + l \sin \omega).$$

La force centrifuge composée provenant de la rotation autour de  $Az$  étant perpendiculaire au plan vertical  $A'A\Lambda_1$ , il n'y a pas à en tenir compte.

Il reste à considérer les forces d'inertie du mouvement relatif considéré comme absolu.

Ce mouvement consistant dans la rotation du wagon autour de  $Az$ , en même temps que les roues et les essieux tournent autour de leurs axes respectifs, il y aura deux parties distinctes dans les forces d'inertie, celles qui proviennent de la rotation du wagon autour de  $Az$ , abs-

traction faite du mouvement particulier des roues, et celles qui se rapportent à ce dernier mouvement.

Dans la rotation autour de  $Az$ , la force d'inertie pour un point  $p$  de masse  $m$  se décompose en deux, l'une dirigée suivant  $Ap$ , l'autre perpendiculaire à cette ligne. La première est égale à  $m \cdot pA \cdot \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$ , son moment est nul, et ses composantes

$$+ m \cdot AI \cdot \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \quad + m \cdot pI \cdot \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$

donnent, en les ajoutant aux composantes semblables relatives aux autres points,

$$+ MI \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2, \quad + Mh \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

La seconde, égale à  $m \cdot pA \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2}$ , donne de même les composantes

$$+ Mh \frac{d^2\omega}{dt^2}, \quad - MI \frac{d^2\omega}{dt^2},$$

et le moment

$$- MI^2 \frac{d^2\omega}{dt^2}.$$

Nous n'avons plus à tenir compte que des forces d'inertie provenant des mouvements des roues, forces très-faibles il est vrai, mais dont la considération présente un certain intérêt.

Nous négligerons l'influence de la rotation des essieux et des moyeux des roues, en ne considérant que les jantes dont la masse sera supposée concentrée à la circonférence.

Soit d'abord la roue tangente en  $A$  au rail  $S$  (*fig. 4*); elle tourne autour d'un axe qu'on peut supposer horizontal. On n'a à calculer que la force d'inertie provenant du mouvement de la roue relativement à son centre; car l'accélération relative d'un point de la roue se compose de celle qui provient de la rotation autour de  $Az$  et dont il a été tenu compte, et de celle qui résulte de la rotation de la roue.

L'accélération relative au centre, pour les différents points de la roue, ne donne rien, puisque deux points  $m, m'$  diamétralement opposés donneront des accélérations relatives égales et contraires.



D'après tout ce qui précède, les équations cherchées seront, en supposant la force  $F$  positive dans le sens  $A, A$ ,

$$\begin{aligned} Mh \frac{d^2\omega}{dt^2} + Ml \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 + M \frac{V^2}{\rho} \cos \omega - Mg \sin \omega - F &= 0, \\ -Ml \frac{d^2\omega}{dt^2} + Mh \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 - M \frac{V^2}{\rho} \sin \omega - Mg \cos \omega + N + N_1 &= 0, \\ -MI^2 \frac{d^2\omega}{dt^2} - M \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega + l \sin \omega) \\ &\quad - Mg(l \cos \omega - h \sin \omega) + 2lN_1 - 8M_1 r \frac{V^2}{\rho} = 0; \end{aligned}$$

ou bien, en posant

$$n = \frac{N}{M}, \quad n_1 = \frac{N_1}{M}, \quad f = \frac{F}{M}, \quad \mu = \frac{M_1}{M},$$

on déduira des équations qui précèdent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} f &= h \frac{d^2\omega}{dt^2} + l \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 + \frac{V^2}{\rho} \cos \omega - g \sin \omega, \\ 2ln &= (2l^2 - I^2) \frac{d^2\omega}{dt^2} - 2lh \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2 - \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega - l \sin \omega) \\ &\quad + g(l \cos \omega + h \sin \omega) - 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \\ 2ln_1 &= I^2 \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega + l \sin \omega) + g(l \cos \omega - h \sin \omega) + 8\mu r \frac{V^2}{\rho}. \end{aligned}$$

Si l'on appelle  $s$  l'arc compté depuis une origine quelconque, de façon que  $s$  croisse avec le temps, on aura

$$ds = V dt,$$

et, faisant disparaître le temps des équations qui précèdent, elles deviennent

$$\begin{aligned} (1) \quad & f = hV^2 \frac{d^2\omega}{ds^2} + lV^2 \left( \frac{d\omega}{ds} \right)^2 + \frac{V^2}{\rho} \cos \omega - g \sin \omega, \\ (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} 2ln &= (2l^2 - I^2) V^2 \frac{d^2\omega}{ds^2} - 2lhV^2 \left( \frac{d\omega}{ds} \right)^2 - \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega - l \sin \omega) \\ &\quad + g(l \cos \omega + h \sin \omega) - 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \end{aligned} \right. \\ (3) \quad & 2ln_1 = I^2 V^2 \frac{d^2\omega}{ds^2} + \frac{V^2}{\rho} (h \cos \omega + l \sin \omega) + g(l \cos \omega - h \sin \omega) + 8\mu r \frac{V^2}{\rho}. \end{aligned}$$

Telles sont les formules qui feront connaître les quantités  $f$ ,  $n$ ,  $n_1$ , et par suite les réactions  $F$ ,  $N$ ,  $N_1$ , quand la vitesse, la forme de la courbe et la loi du dévers seront données.

*La stabilité du wagon sera assurée si ces données sont telles que l'on ait*

$$f = 0, \quad n > 0, \quad n_1 > 0.$$

L'équation (1), en y faisant  $f = 0$ , établit une relation entre  $\rho$  et  $\omega$ , c'est-à-dire entre la forme de la courbe et la loi du dévers; en d'autres termes, si l'on se donne la forme de la courbe, l'équation fournira la loi correspondante pour le dévers, et réciproquement; mais une courbe déterminée et la loi correspondante pour  $\omega$  ne constituent une solution admissible du problème posé qu'autant que les valeurs de  $n$  et de  $n_1$ , fournies par les formules (2) et (3) sont positives.

## II.

Occupons-nous maintenant de la réalisation des conditions de stabilité.

Le raccordement par un *arc de cercle* tangent aux deux alignements droits étant le plus facile à tracer, nous le considérerons en premier lieu. Le dévers, nul d'abord, croîtra d'une manière continue jusqu'à une valeur maxima  $\omega_1$  déterminée par la vitesse du train et le rayon de courbure de la voie, de telle façon qu'avec ce dévers constant les conditions de stabilité soient remplies sur l'arc de cercle, après quoi le dévers décroîtra jusqu'à s'annuler.

La valeur de  $\omega_1$  se tirera de la formule (1) qui donne, pour le cas actuel,

$$\text{tang } \omega_1 = \frac{V^2}{g\rho},$$

valeur qui est telle que la résultante des forces  $P$ ,  $Q$  (*fig. 3*) soit normale à  $AA_1$ .

Les formules (2) et (3) donnent alors

$$2ln = g(l \cos \omega_1 + h \sin \omega_1) - \frac{V^2}{\rho}(h \cos \omega_1 - l \sin \omega_1) - 8\mu r \frac{V^2}{\rho},$$

$$2ln_1 = g(l \cos \omega_1 - h \sin \omega_1) + \frac{V^2}{\rho}(h \cos \omega_1 + l \sin \omega_1) + 8\mu r \frac{V^2}{\rho};$$

et, comme  $\omega_1$ , et par suite  $\frac{V^2}{\rho}$ , est une quantité qu'on suppose petite, les valeurs de  $n$  et  $n_1$  sont positives, et, si l'on néglige les quantités de l'ordre de  $\omega_1^2$ , on aura

$$\omega_1 = \frac{V^2}{g\rho}, \quad n = \frac{g}{2} - 4\mu \frac{r}{l} \frac{V^2}{\rho}, \quad n_1 = \frac{g}{2} + 4\mu \frac{r}{l} \frac{V^2}{\rho},$$

d'où l'on voit que la différence des pressions est  $8M_1 \frac{r}{l} \frac{V^2}{\rho}$ , quantité de l'ordre de  $\omega$ .

Cherchons actuellement *comment le dévers variable doit être établi sur l'arc de cercle.*

On a pour cela à intégrer l'équation

$$(4) \quad \frac{d^2\omega}{ds^2} + \frac{l}{h} \left( \frac{d\omega}{ds} \right)^2 + \frac{1}{\rho h} \cos \omega - \frac{g}{hV^2} \sin \omega = 0,$$

dans laquelle  $\rho$  est supposé constant.

Par une première intégration, on trouve,  $a$  étant une constante arbitraire,

$$(5) \quad \left( \frac{d\omega}{ds} \right)^2 = ae^{-\frac{2l\omega}{h}} + \frac{2}{h^2 + 4l^2} \left[ \left( \frac{2gl}{V^2} - \frac{h}{\rho} \right) \sin \omega - \left( \frac{gh}{V^2} + \frac{2l}{\rho} \right) \cos \omega \right].$$

La valeur initiale  $\omega_0$  de  $\omega$  sur l'arc de cercle ne doit pas être nulle, car  $\frac{d^2\omega}{ds^2}$  serait initialement négatif d'après (4), et, par suite, l'angle formé avec l'horizon par la tangente au rail en dévers irait d'abord en décroissant pour croître ensuite, c'est-à-dire que, si l'on développait sur un plan le cylindre vertical ayant le rail en dévers pour directrice, la transformée de cette ligne présenterait une inflexion, ce qu'il est convenable d'éviter. Par suite, *on ne doit pas passer sur l'arc de cercle sans un dévers initial, et il faut alors que le dévers soit distribué partie sur l'alignement, partie sur le cercle.*

On aura, d'après cela, pour la constante  $a$ , en appelant  $\alpha$  la valeur initiale de  $\frac{d\omega}{ds}$ ,

$$a = \left\{ \alpha^2 + \frac{2}{h^2 + 4l^2} \left[ \left( \frac{gh}{V^2} + \frac{2l}{\rho} \right) \cos \omega_0 - \left( \frac{2gl}{V^2} - \frac{h}{\rho} \right) \sin \omega_0 \right] \right\} e^{\frac{2l\omega_0}{h}}.$$



L'intégration de l'équation (5) dépend d'une quadrature que l'on ne peut effectuer que par approximation.

Nous considérerons à cet effet les quantités  $\omega$ ,  $\frac{d\omega}{ds}$ ,  $\frac{d^2\omega}{ds^2}$  et leurs valeurs initiales comme des infiniment petits du premier ordre, ainsi que le maximum  $\frac{V^2}{g\rho}$  de  $\omega$ , et *a fortiori*  $\frac{1}{\rho}$ . Les résultats obtenus de la sorte seront d'autant plus approchés que la vitesse V, qu'on peut modifier dans le voisinage du raccordement, sera plus petite, et que le rayon  $\rho$  sera plus grand.

Si alors, dans l'équation (5), on néglige les termes d'ordre supérieur au second, on aura une équation de la forme

$$(6) \quad \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = A\omega^2 + 2B\omega + C,$$

et, dans le calcul du coefficient A, on pourra négliger tout ce qui est infiniment petit, dans celui de B, tout ce qui est d'ordre supérieur au premier, et, dans celui de C, tout ce qui est d'ordre supérieur au second.

On a d'abord

$$\begin{aligned} A &= 2 \frac{l^2}{h^2} a_0 + \frac{1}{h^2 + 4l^2} \frac{gh}{V^2}, \\ B &= -\frac{i}{h} a_1 + \frac{1}{h^2 + 4l^2} \left( \frac{2gl}{V^2} - \frac{h}{\rho} \right), \\ C &= a - \frac{2}{h^2 + 4l^2} \left( \frac{gh}{V^2} + \frac{2l}{\rho} \right). \end{aligned}$$

en représentant par  $a_0$  et  $a_1$  ce que devient  $a$  quand on ne conserve dans son expression que les termes finis, ou ces termes avec ceux du premier ordre seulement. On trouve

$$a_1 = \frac{2}{h^2 + 4l^2} \left( \frac{gh}{V^2} + \frac{2l}{\rho} \right), \quad a_0 = \frac{2gh}{V^2(h^2 + 4l^2)},$$

et les valeurs des coefficients deviennent

$$A = \frac{g}{hV^2}, \quad B = -\frac{1}{\rho h}, \quad C = a - \frac{2}{h^2 + 4l^2} \left( \frac{gh}{V^2} + \frac{2l}{\rho} \right).$$

On voit que B est du premier ordre, et il est facile de vérifier que tous les termes finis ou du premier ordre disparaissent de l'expression de C, qui se trouve être alors du second ordre; et, par suite, tous les termes de l'équation (6) sont du même ordre infinitésimal.

Si l'on convient de compter  $s$ , pour chaque arc de raccordement, du point de contact le plus voisin avec l'alignement droit, on aura, pour  $\omega$  croissant ou décroissant, Log étant la caractéristique des logarithmes népériens,

$$(7) \quad s\sqrt{A} = \text{Log} \frac{A\omega + B + \sqrt{A(A\omega^2 + 2B\omega + C)}}{A\omega_0 + B + \sqrt{A(A\omega_0^2 + 2B\omega_0 + C)}},$$

la constante d'intégration ayant été déterminée par la condition que pour  $s = 0$  on ait  $\omega = \omega_0$ .

En posant

$$R = A\omega_0 + B + \sqrt{A(A\omega_0^2 + 2B\omega_0 + C)},$$

on tirera de l'équation (7), pour la loi du dévers variable sur un arc de cercle, la formule

$$(8) \quad \omega = \frac{R}{2A} e^{s\sqrt{A}} + \frac{B^2 - AC}{2AR} e^{-s\sqrt{A}} - \frac{B}{A},$$

dans laquelle tous les termes sont bien du premier ordre.

Enfin la longueur de l'arc de cercle qui reçoit le dévers variable de  $\omega_0$  à  $\omega_1$  sera donnée par la formule (7), dans laquelle on remplacera  $\omega$  par  $\omega_1$ .

Si l'on compare la solution approchée (8) à l'équation (4), on vérifie facilement qu'elle est l'intégrale exacte de cette équation quand on n'y conserve que les termes du premier ordre.

Pour compléter la solution précédente, il reste à considérer la distribution du dévers sur l'alignement droit entre les limites zéro et  $\omega_0$ .

L'équation (4), en y faisant  $\rho = \infty$ , devient

$$(9) \quad \frac{d^2\omega}{ds^2} + \frac{l}{h} \left( \frac{d\omega}{ds} \right)^2 - \frac{g}{hV^2} \sin \omega = 0,$$

et donne, par une première intégration,

$$(10) \quad \left(\frac{d\omega}{ds}\right)^2 = a' e^{-\frac{2l\omega}{h}} + \frac{2g}{v^3(h^2 + 4l^2)} (2l \sin \omega - h \cos \omega),$$

la constante  $a'$  ayant pour valeur

$$a' = \alpha'^2 + \frac{2gh}{v^3(h^2 + 4l^2)},$$

$\alpha'$  étant la valeur initiale de  $\frac{d\omega}{ds}$  sur l'alignement droit.

En intégrant, comme pour le cercle, l'équation (10) par approximation, on trouvera

$$(11) \quad s = v \sqrt{\frac{h}{g}} \text{Log} \frac{\omega}{\alpha'} \frac{\sqrt{\frac{g}{h}} + \sqrt{\frac{g}{h} \frac{\omega^2}{v^2} + \alpha'^2}}{\alpha'};$$

d'où l'on tire, pour la loi du dévers,

$$(12) \quad \omega = \frac{v\alpha'}{2} \sqrt{\frac{h}{g}} \left[ e^{\frac{s}{v} \sqrt{\frac{g}{h}}} - e^{-\frac{s}{v} \sqrt{\frac{g}{h}}} \right],$$

solution qui vérifie l'équation (9) réduite à ses termes du premier ordre. On voit que  $\alpha'$  ne peut être nul, et, par suite, que la courbe formée par le rail en dévers sur l'alignement droit n'est pas tangente à la portion rectiligne de cet alignement, et qu'il y a comme un point anguleux à son origine.

La longueur de l'alignement droit en dévers s'obtiendra de la formule (11), en y faisant  $\omega = \omega_0$ , et elle ne dépendra que de  $\alpha'$  après que  $\omega_0$  aura été fixé. Si l'on veut que l'arc de cercle soit tangent à l'origine au rail en dévers de l'alignement droit, il faut que  $\frac{d\omega}{ds}$  ait à ce point la même valeur pour les deux lignes, ce qui conduit à la condition

$$\alpha^2 - \alpha'^2 = \frac{g \omega_0^2}{h v^2},$$

qui relie les trois quantités  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\omega_0$ , dont deux restent indéterminées.

Enfin, pour le calcul des pressions dans le raccordement circulaire, en ne conservant, dans les formules (2) et (3), que les termes d'ordre inférieur au second, on aura

$$\begin{aligned} 2ln &= (2l^2 - l^2) V^2 \frac{d^2\omega}{ds^2} + gl + gh\omega - h \frac{V^2}{\rho} - 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \\ 2ln_1 &= l^2 V^2 \frac{d^2\omega}{ds^2} + gl - gh\omega + h \frac{V^2}{\rho} + 8\mu r \frac{V^2}{\rho}; \end{aligned}$$

et, avec la même approximation, (4) donne

$$\frac{d^2\omega}{ds^2} = \frac{g\omega}{hV^2} - \frac{1}{\rho h}.$$

Substituant cette valeur dans les équations précédentes, et se rappelant que

$$l^2 = l_0^2 + h^2 + l^2,$$

on aura

$$\begin{aligned} 2ln &= gl + \left( \frac{V^2}{\rho} - g\omega \right) \frac{l_0^2 - l^2}{h} - 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \\ 2ln_1 &= gl - \left( \frac{V^2}{\rho} - g\omega \right) \frac{l_0^2 + l^2}{h} + 8\mu r \frac{V^2}{\rho}, \end{aligned}$$

valeurs qui seront positives, comme leur partie principale  $gl$ .

En faisant  $\rho = \infty$ , dans les formules précédentes, on aura, pour l'alignement droit en dévers,

$$2ln = gl - g \frac{l_0^2 - l^2}{h} \omega, \quad 2ln_1 = gl + g \frac{l_0^2 + l^2}{h} \omega.$$

Le problème du raccordement, au moyen d'un arc de cercle, serait donc théoriquement résolu par les formules qui précèdent, mais la complication de la loi correspondante du dévers se refuse à toute application. Posons donc la question en sens inverse, en nous donnant la loi la plus simple pour le dévers, qui est la répartition uniformément croissante ou décroissante, et proposons donc de *chercher quelle doit être la courbe pour que le dévers varie uniformément*.

En comptant l'arc du point de contact avec l'alignement droit, on aura

$$\omega = \alpha s, \quad \frac{d\omega}{ds} = \alpha, \quad \frac{d^2\omega}{ds^2} = 0,$$

et l'équation (4) deviendra

$$(13) \quad l\alpha^2 - \frac{g}{V^2} \sin \alpha s + \frac{1}{\rho} \cos \alpha s = 0.$$

Rapportons la courbe au prolongement de l'alignement pour axe des  $x$ , et à sa perpendiculaire dirigée horizontalement du côté de la concavité pour axe des  $y$ , l'origine des coordonnées étant l'origine de l'arc. En posant  $\frac{dx}{ds} = p$ , d'où

$$\rho = - \frac{\sqrt{1-p^2}}{\frac{dp}{ds}},$$

l'équation (13) devient

$$- \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \frac{dp}{ds} = \frac{g}{V^2} \tan \alpha s - \frac{l\alpha^2}{\cos \alpha s},$$

et donne, en intégrant,

$$(14) \quad \text{arc } \cos p = \frac{g}{2V^2} \text{Log} \frac{1}{\cos \alpha s} - l\alpha \text{Log} \frac{1 + \tan \frac{\alpha s}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha s}{2}},$$

la constante d'intégration étant nulle, puisque, pour  $s = 0$ , on doit avoir  $p = 1$ .

Par cette équation,  $x$  pourrait s'exprimer au moyen d'une quadrature en fonction de  $s$ , et il en serait de même de  $y$ , le premier membre de cette équation n'étant autre que  $\text{arc } \sin \sqrt{1-p^2}$  ou  $\text{arc } \sin \frac{dy}{ds}$ ; mais, si l'on considère  $\omega$  et, par suite,  $\alpha$  comme infiniment petits, le second membre de l'équation (14) pourra se développer en série convergente et deviendra

$$\frac{gs^2}{2V^2} \alpha + \left( \frac{gs^4}{4V^2} - l \right) s \alpha^2 + \left( \frac{gs^6}{12V^2} - l \right) \frac{s^2}{4} \alpha^3 - \left( \frac{gs^8}{4V^2} + l \right) \frac{s^3}{24} \alpha^4 + \dots,$$

ce qui montre que le premier membre et, par suite,  $\frac{dy}{ds}$  sont infiniment petits de l'ordre de  $\omega$  ou de  $\alpha$ . En développant alors ce premier membre, il deviendra

$$\frac{dy}{ds} + \frac{1}{2} \frac{1}{3} \left( \frac{dy}{ds} \right)^3 + \frac{1.3}{2.4} \frac{1}{5} \left( \frac{dy}{ds} \right)^5 + \dots,$$

et, ne conservant que les termes du premier ordre dans les deux membres de l'équation, on aura, en intégrant,

$$(15) \quad y = \frac{g\alpha}{6V^2} s^3,$$

où l'on pourra même remplacer  $s$  par  $x$ , ce qui donnera, pour l'équation de la courbe cherchée,

$$(16) \quad y = \frac{g\alpha}{6V^2} x^3.$$

On vérifie facilement que cette solution satisfait à l'équation (13) quand on n'y conserve que les termes du premier ordre. Cette équation devient alors

$$\rho s = \frac{V^2}{\alpha g} \quad \text{ou} \quad \rho \omega = \frac{V^2}{g}$$

d'où l'on voit que la courbe approchée jouit de cette propriété que *le rayon de courbure varie en raison inverse de la longueur de l'arc*; et, par suite, que *le dévers varie en raison inverse du rayon de courbure*.

Pour les pressions, si, dans les formules (2) et (3), on fait  $\omega = \alpha s$ ,  $\frac{1}{\rho} = \frac{g\alpha s}{V^2}$ , on aura, en négligeant les termes d'ordre supérieur au premier,

$$2ln = gl - 8\mu g r \alpha s,$$

$$2ln_1 = gl + 8\mu g r \alpha s,$$

quantités qui sont positives.

La courbe (16) est facile à construire, et le raccordement se composera d'un arc de cercle de rayon  $\rho_1$  avec dévers constant  $\omega_1 = \frac{V^2}{g\rho_1}$  et de deux courbes suivant lesquelles le dévers variera uniformément.

Or le rayon de courbure de chacune de ces courbes, au point de contact avec le cercle, est précisément  $\rho_1$ , et, par suite, *l'arc de cercle sera osculateur aux deux courbes, qui ont d'ailleurs chacune un contact du second ordre avec l'alignement droit correspondant.*

On aurait pu, partant de l'équation (15), calculer rigoureusement  $x$  et  $y$  en fonction d'une variable auxiliaire.

En posant  $\frac{6V^2}{g^2} = 27b^6$  et  $y = z^3$ , on tire de (15)

$$dx = 3dz \sqrt{b^3 - z^4},$$

et, posant  $z = b \cos \varphi$ , on trouve

$$x = b^3 \cos \varphi \sqrt{1 - \cos^4 \varphi} + \frac{b^3 \sqrt{2}}{3} \left[ F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right],$$

$$y = b^3 \cos^3 \varphi,$$

F étant la caractéristique de la fonction elliptique de première espèce. Mais ces résultats n'ont pas d'utilité pratique.

Nous venons de trouver une méthode de raccordement qui satisfait sensiblement à toutes les conditions de stabilité, sans présenter de grandes difficultés d'exécution. Nous dirons cependant, en terminant cette étude, quelques mots de la disposition la plus avantageuse à donner au raccordement quand on tient à n'employer que l'arc de cercle comme courbe et une distribution uniforme du dévers, ce qu'on peut faire quand le rayon du cercle est très-grand, et cela d'autant mieux qu'il ne peut y avoir de solution exacte commune pour des trains de vitesses différentes.

Si l'on suppose que le dévers soit distribué uniformément sur l'alignement droit entre les limites zéro et  $\omega_0$ , suivant la formule  $\omega = \alpha s$ , et, sur l'arc de cercle, de  $\omega_0$  à  $\omega_1$ , suivant la formule  $\omega = \omega_0 + \beta s$ , en comptant  $s$ , sur l'alignement droit, du point où commence le dévers, et, sur le cercle, du point où commence la courbe, on aura sur la droite

$$f = lV^2 \alpha^2 - g \sin \alpha s,$$

et sur le cercle

$$f_1 = lV^2 \beta^2 + \frac{V^2}{\rho} \cos(\omega_0 + \beta s) - g \sin(\omega_0 + \beta s),$$

ou, en négligeant les quantités d'ordre supérieur au premier,

$$f = -g\alpha s, \quad f_1 = \frac{V^2}{\rho} - g\omega_0 - g\beta s.$$

On voit que la pression, pour la droite, est dirigée du côté de la convexité de la courbe, qu'elle augmente avec  $s$  et atteint son maximum  $g\omega_0$  au point de contact avec le cercle. L'inverse a lieu pour la pression sur le cercle : elle est initialement dirigée vers la convexité et égale à  $\frac{V^2}{\rho} - g\omega_0$ , quantité positive, puisqu'on a  $\omega_0 < \omega_1 = \frac{V^2}{g\rho}$ ; elle décroît ensuite et s'annule quand le dévers prend la valeur constante  $\omega_1$ , qui convient à la vitesse supposée et au rayon du cercle considéré; donc, en passant de la droite sur le cercle, la pression change brusquement de sens, et cela pouvait d'ailleurs se voir *a priori*.

Si l'on entrait en courbe sans dévers, la pression initiale serait  $\frac{V^2}{\rho}$ , plus grande que celle qu'on avait précédemment, et l'on voit que, si la répartition du dévers se fait par parties égales sur la droite et sur le cercle, la pression maxima ne sera que la moitié de ce qu'elle serait dans le cas où l'arc de cercle serait seul en dévers. On a alors, en effet,  $\omega_0 = \frac{\omega_1}{2} = \frac{V^2}{2g\rho}$ , et la pression maxima, au point de contact de la droite et du cercle, a sur ces deux lignes la même valeur  $\frac{V^2}{2\rho}$  et change brusquement de sens en ce point, circonstance favorable à la stabilité du wagon.

Telle est donc la construction qui sera la plus avantageuse si l'on s'astreint à n'employer que des cercles pour courbes et des dévers uniformément croissants.

Quant aux pressions, on les calculera facilement au moyen des formules (2) et (3), en y remplaçant  $\rho$  et  $\omega$  par les valeurs relatives au cas actuel.



*Développements sur la question du mouvement d'un point matériel sur une surface ;*

PAR M. H. RESAL.

Cette question, ayant été traitée bien des fois, devrait être considérée comme épuisée. Je crois cependant être arrivé à quelques résultats nouveaux, que je me propose de faire connaître dans ce travail.

Pour éviter toute confusion, j'emploierai la caractéristique  $\delta$  pour désigner les différentielles partielles, en réservant la lettre  $d$  pour caractériser les différentielles totales.

*Coordonnées rectangulaires.*

Soient

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface ;

$N$  sa réaction sur un point mobile  $m$  ;

$v$  la vitesse de ce point au bout du temps  $t$  ;

$ds = v dt$  l'élément de chemin ;

$X, Y, Z$  les composantes de la force extérieure  $F$  qui agit sur le mobile, parallèles aux axes  $Ox, Oy, Oz$  ;

$\alpha, \beta, \gamma$  et  $\lambda, \mu, \nu$  les angles que forment respectivement avec les axes ci-dessus les directions de  $v$  et de  $N$ .

On a, comme on le sait,

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$(3) \quad \cos \lambda = \pm \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos \mu = \pm \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos \nu = \pm \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial z},$$

en posant, pour abrégér,

$$(4) \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

En supposant égale à l'unité la masse du point  $m$ , ce qui revient à substituer aux forces leurs accélérations, l'équation du mouvement du point en projection sur l'axe des  $x$  peut se mettre sous la forme

$$\frac{dv \cos \alpha}{dt} = X + N \cos \lambda,$$

ou, en développant,

$$(a) \quad \cos \alpha \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{d \cos \alpha}{ds} = X + N \cos \lambda.$$

On a de même, pour les axes des  $y$  et des  $z$ ,

$$(a') \quad \cos \beta \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{d \cos \beta}{ds} = Y + N \cos \mu,$$

$$(a'') \quad \cos \gamma \frac{dv}{dt} + v^2 \frac{d \cos \gamma}{ds} = Z + N \cos \nu.$$

Les équations (a) et (a') donnent, par l'élimination de  $\frac{dv}{dt}$ ,

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{l} v^2 \frac{(\cos \beta d \cos \alpha - \cos \alpha d \cos \beta)}{ds} \\ = X \cos \beta - Y \cos \alpha + N(\cos \lambda \cos \beta - \cos \mu \cos \alpha). \end{array} \right.$$

Soient :

$\varepsilon$  l'angle de contingence de la courbe décrite par le mobile ;

$\alpha', \beta', \gamma'$  les angles que forme la binormale ou axe du plan osculateur avec les axes  $Ox, Oy, Oz$  :

$\rho = \frac{ds}{\varepsilon}$  le rayon de courbure.

On a

$$(5) \quad \varepsilon \cos \gamma' = \cos \beta' d \cos \alpha - \cos \alpha d \cos \beta \quad [^*],$$

et l'équation (a) peut se mettre sous la forme suivante :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{v^2}{\rho} \cos \gamma' = X \cos \beta' - Y \cos \alpha + N' \cos \lambda \cos \beta' - \cos \mu \cos \alpha, \\ \text{et de même} \\ \frac{v^2}{\rho} \cos \beta' = Z \cos \alpha - X \cos \gamma' + N' (\cos \nu \cos \alpha - \cos \lambda \cos \gamma'), \\ \frac{v^2}{\rho} \cos \alpha' = Y \cos \gamma' - Z \cos \beta' + N' (\cos \mu \cos \gamma' - \cos \nu \cos \beta'). \end{array} \right.$$

Si  $\theta$  désigne l'angle formé par la binormale à la trajectoire avec la normale à la surface, on a

$$(c) \quad \cos \theta = \cos \alpha' \cos \lambda + \cos \beta' \cos \mu + \cos \gamma' \cos \nu,$$

avec les relations

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu = 0, \\ \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on ajoute membre à membre les équations (6) multipliées respectivement par  $\cos \nu$ ,  $\cos \mu$ ,  $\cos \lambda$ , on trouve, eu égard aux relations précédentes,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{v^2}{\rho} \cos \theta = X (\cos \beta \cos \nu - \cos \gamma \cos \mu) + Y (\cos \gamma \cos \lambda - \cos \alpha \cos \nu) \\ \quad + Z (\cos \alpha \cos \mu - \cos \beta \cos \lambda). \end{array} \right.$$

Le premier membre de cette équation est le quotient du carré de la vitesse par le rayon de courbure géodésique; dans le second

[\*] Menons en effet, par l'origine O, deux droites d'une longueur égale à l'unité et parallèles à deux tangentes consécutives, et joignons leurs extrémités; nous obtenons ainsi un triangle infinitésimal. La formule (5) n'exprime autre chose que l'égalité de deux expressions de la projection de l'aire de ce triangle sur le plan  $xOy$ .

nombre, le coefficient de  $Z$ , par exemple, est le cosinus de l'angle formé par la tangente à la trajectoire avec l'axe  $Oz$  [\*].

On a donc ce théorème peu connu, auquel j'étais arrivé, il y a bien des années, par des considérations géométriques :

*La composante de la force extérieure suivant la perpendiculaire à la vitesse, comprise dans le plan tangent, est égale au produit de la vitesse par la courbure géodésique de la trajectoire.*

Si l'on ajoute entre elles les équations  $(a)$ ,  $(a')$ ,  $(a'')$ , après les avoir multipliées respectivement par  $\cos\lambda$ ,  $\cos\mu$ ,  $\cos\nu$ , et que l'on ait égard à la première des relations  $(d)$ , on trouve

$$\begin{aligned} v^2 \left( \cos\lambda \frac{d\cos\alpha}{ds} + \cos\mu \frac{d\cos\beta}{ds} + \cos\nu \frac{d\cos\gamma}{ds} \right) \\ = X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu + N. \end{aligned}$$

Soient  $\alpha''$ ,  $\beta''$ ,  $\gamma''$  les angles formés par la normale principale de la trajectoire avec les axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ; on a

$$(e) \quad \cos\alpha'' = \frac{d\cos\alpha}{s}, \quad \cos\beta'' = \frac{d\cos\beta}{s}, \quad \cos\gamma'' = \frac{d\cos\gamma}{s} \quad [**],$$

et l'équation précédente peut, par suite, se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{\rho} (\cos\alpha \cos\alpha'' + \cos\beta \cos\beta'' + \cos\gamma \cos\gamma'') \\ = X \cos\lambda + Y \cos\mu + Z \cos\nu + N. \end{aligned}$$

Or le coefficient de  $\frac{v^2}{\rho}$  est le cosinus de l'angle formé par la normale principale à la trajectoire avec la normale à la surface, et  $\rho$  divisé

[\*] En effet, menons, par l'origine, deux droites  $Oa$ ,  $Ob$  d'une longueur égale à l'unité, respectivement parallèles à  $v$  et à  $N$ ; joignons  $ab$ ; élevons en  $O$  la perpendiculaire  $Oc$  au plan du triangle  $aOb$ , égale à la valeur numérique de l'aire de ce triangle : si l'on exprime que la projection de  $Oc$  sur  $Oz$  est égale à la projection de l'aire  $aOb$  sur le plan  $xOy$ , on arrive au résultat énoncé.

[\*\*] On arrive immédiatement à ces formules (démonstration de M. Serret) en projetant successivement sur les trois axes le contour du triangle infinitésimal de la note de la page précédente.

par ce cosinus est égal au rayon de courbure  $\Gamma$  de la section normale à la surface passant par la direction de la vitesse.

L'équation ci-dessus peut donc se mettre sous cette forme

$$(8) \quad N = \frac{v^2}{\Gamma} - (X \cos \lambda + Y \cos \mu + Z \cos \nu);$$

d'où ce théorème, que l'on démontre facilement par la Géométrie :

*La réaction de la surface est égale au quotient du carré de la vitesse par le rayon de courbure de la section normale menée par la direction de cette vitesse, diminué de la composante de la force extérieure normale à la surface, le sens positif de cette composante étant celui de la réaction.*

Si l'on ajoute membre à membre les équations  $(a)$ ,  $(a')$ ,  $(a'')$ , après les avoir multipliées respectivement par  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ , on trouve

$$(9) \quad \frac{dv}{dt} = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma,$$

comme on devait le prévoir.

Ainsi, au système des équations  $(a)$ ,  $(a')$ ,  $(a'')$ , on peut substituer le système des équations  $(7)$ ,  $(8)$  et  $(9)$ , dont une seule d'entre elles renferme la réaction de la surface dont on pourra, par suite, trouver la valeur lorsque les éléments du mouvement seront connus.

L'équation qui, jointe à l'équation  $(1)$ , doit déterminer la forme de la trajectoire, ne peut résulter que de l'élimination du temps entre les équations  $(7)$  et  $(9)$ , et c'est cette élimination que nous allons faire dans le cas où la force extérieure dérive d'un potentiel  $\Psi(x, y, z)$ .

Nous pouvons substituer à l'équation  $(9)$  celle des forces vives qui s'en déduit, on

$$(9') \quad v^2 = 2\Psi + C,$$

$C$  étant une constante.

Nous avons

$$(10) \quad X = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

En ayant égard à la formule (c), l'équation (7) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} & \frac{v^2}{ds} (\varepsilon \cos \alpha' \cos \lambda + \varepsilon \cos \beta' \cos \mu + \varepsilon \cos \gamma' \cos \nu) \\ &= X(\cos \beta \cos \nu - \cos \gamma \cos \mu) + Y(\cos \gamma \cos \lambda - \cos \alpha \cos \nu) \\ & \quad + Z(\cos \alpha \cos \mu - \cos \beta \cos \lambda). \end{aligned}$$

Maintenant, dans le premier membre de cette équation, on substitue à  $\varepsilon \cos \alpha'$ ,  $\varepsilon \cos \beta'$ ,  $\varepsilon \cos \gamma'$  leurs valeurs déduites de la formule (5) et de ses deux analogues; on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{v^2}{ds} [\cos \gamma d \cos \beta - \cos \beta d \cos \gamma] \cos \lambda + [\cos \alpha d \cos \gamma - \cos \gamma d \cos \alpha] \cos \mu \\ & \quad + [\cos \beta d \cos \alpha - \cos \alpha d \cos \beta] \cos \nu \\ &= X(\cos \beta \cos \nu - \cos \gamma \cos \mu) + Y(\cos \gamma \cos \lambda - \cos \alpha \cos \nu) \\ & \quad + Z(\cos \alpha \cos \mu - \cos \beta \cos \lambda); \end{aligned}$$

mais on a

$$d \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} = \frac{\cos \gamma d \cos \beta - \cos \beta d \cos \gamma}{\cos^2 \gamma}, \quad \dots$$

par suite,

$$\begin{aligned} & \frac{v^2}{ds} \left( \cos^2 \gamma \cos \lambda d \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} + \cos^2 \alpha \cos \mu d \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} + \cos^2 \beta \cos \nu d \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \right) \\ &= X(\cos \beta \cos \nu - \cos \gamma \cos \mu) + Y(\cos \gamma \cos \lambda - \cos \alpha \cos \nu) \\ & \quad + Z(\cos \alpha \cos \mu - \cos \beta \cos \lambda), \end{aligned}$$

ou, en vertu des formules (2), (3), (9'), (10),

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & (2\Psi + \mathbf{C}) \left[ \frac{dz^2}{ds^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \frac{d}{ds} \left( \frac{dx}{dz} \right) + \frac{dx^2}{ds^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \frac{d}{ds} \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{dy^2}{ds^2} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \frac{d}{ds} \left( \frac{dz}{dy} \right) \right] \\ &= \left( \frac{dy}{ds} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} - \frac{dz}{ds} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left( \frac{dz}{ds} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} - \frac{dx}{ds} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ & \quad + \left( \frac{dx}{ds} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} - \frac{dy}{ds} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'équation cherchée qui est symétrique par rapport aux coordonnées et qui ne me paraît pas avoir été donnée jusqu'à présent.

En supposant  $\Psi = 0$ , on obtiendra, pour l'équation différentielle des lignes géodésiques de la surface  $F = 0$ ,

$$(12) \quad dz^2 \frac{\partial F}{\partial x} d\left(\frac{dy}{dz}\right) + dx^2 \frac{\partial F}{\partial y} d\left(\frac{dz}{dx}\right) + dy^2 \frac{\partial F}{\partial z} d\left(\frac{dx}{dy}\right) = 0,$$

équation dans laquelle on choisira la variable la plus convenable dans la question que l'on aura à traiter.

Supposons que l'équation de la surface puisse se mettre sous la forme

$$(13) \quad z = f(x, y);$$

nous aurons

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1,$$

et, en prenant  $x$  pour variable, l'équation (12) deviendra

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{dz}{dx} - \frac{dy}{dx} \frac{d^2 z}{dx^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}, \\ \frac{d^2 z}{dx^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{df}{dy} \frac{d^2 y}{dx^2}, \end{aligned}$$

et l'équation différentielle des lignes géodésiques en projection sur le plan  $xOy$  est, par suite,

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} \left( 1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dy^3}{dx^3} + \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{dy}{dx} \\ + \left( 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

S'il s'agit d'une surface sinuense, différant assez peu du plan moyen  $xOy$  pour que l'on puisse négliger les secondes puissances de  $z$  et de ses dérivées partielles premières et secondes, on voit, d'après cette équation, que la projection sur le plan moyen d'une

ligne géodésique sera, aux termes du second ordre près, une ligne droite; conséquence qui pourrait peut-être avoir une certaine utilité dans l'art du nivellement.

*Coordonnées cylindriques.*

Conservons à  $N$  la même signification que plus haut.

Soient (*fig. 1*)

$z = mn$  l'ordonnée du point mobile  $m$  parallèle à l'axe  $Oz$ ;

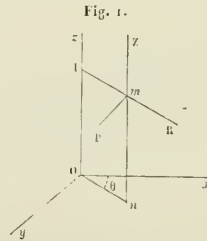
$r = mI = On = r$  la distance du point à cet axe;

$\varphi$  l'angle formé par  $On$  avec  $Ox$ ;

$$(1) \quad F(r, \varphi, z) = 0$$

l'équation de la surface fixe;

$R, P, Z$  les composantes de la force extérieure  $F$  suivant les directions de  $r$ , de la perpendiculaire à ce rayon menée parallèlement au plan  $xOy$ , et de la parallèle en  $m$  à  $Oz$ .



Nous supposons que la force extérieure  $F$  dérive d'un potentiel

$$\Psi(r, \varphi, z),$$

de sorte que nous aurons, pour l'expression du travail virtuel pour un déplacement quelconque,

$$R \delta r + P r \delta \varphi + Z \delta z = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \delta r + \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \delta z,$$



d'où

$$(2) \quad R = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad P = \frac{\partial \Psi}{r \partial \varphi}, \quad Z = \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Le principe des forces vives donne, en appelant C une constante,

$$\frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}{dt^2} = 2\Psi + C,$$

et, en posant

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega, \quad u = \omega^2,$$

cette équation prend la forme

$$(3) \quad u \left( r^2 + \frac{dr^2 + dz^2}{d\varphi^2} \right) = 2\Psi + C.$$

Soient  $\lambda, \mu, \nu$  les angles formés par la direction de N avec celles de R, P, Z; on a, en exprimant que le travail virtuel de la réaction N de la surface est nul, pour un déplacement quelconque sur la surface,

$$N \cos \lambda \delta r + N \cos \mu \cdot r \delta \varphi + N \cos \nu \delta z = 0;$$

mais on a aussi

$$\frac{\partial F}{\partial r} \delta r + \frac{\partial F}{r \partial \varphi} r \delta \varphi + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0,$$

d'où, par comparaison,

$$(4) \quad \cos \lambda = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \cos \mu = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{r \partial \varphi}, \quad \cos \nu = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial z},$$

en posant

$$(5) \quad \Delta = \sqrt{\left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{r \partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2}.$$

L'équation du mouvement en projection sur l'axe Oz est

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos \nu,$$

ou

$$\omega \frac{dz}{d\varphi} = Z + N \cos \nu.$$

ou encore, en développant,

$$(6) \quad \frac{1}{2} \frac{du}{d\varphi} \frac{dz}{d\varphi} + u \frac{d^2z}{d\varphi^2} = Z + N \cos \nu.$$

En projetant le mouvement sur le plan  $xOy$ , et prenant les moments par rapport au point  $O$ , on trouve

$$\frac{d\omega r^2}{dt} = Pr + Nr \cos \mu,$$

d'où

$$\omega \frac{d\omega r^2}{d\varphi} = Pr + N \cos \mu r,$$

et enfin, en développant,

$$(7) \quad \frac{r}{2} \frac{du}{d\varphi} + 2u \frac{dr}{d\varphi} = P + N \cos \mu.$$

Si nous considérons la projection  $n$  de  $m$  sur le plan  $xOy$  comme un mobile animé d'un mouvement relatif suivant la droite indéfinie  $On$ , qui se meut avec la vitesse angulaire  $\omega$ , on a (théorème de Coriolis), en remarquant que les forces d'entraînement  $r \frac{d\omega}{dt}$  et centrifuge composée sont perpendiculaires à  $On$ ,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = R + \omega^2 r + N \cos \lambda,$$

d'où, en opérant comme pour l'établissement de la formule (6),

$$(8) \quad \frac{1}{2} \frac{du}{d\varphi} \frac{dr}{d\varphi} + u \frac{d^2r}{d\varphi^2} = R + ur + N \cos \lambda.$$

Les équations (3), (6), (7), (8), dans les trois dernières desquelles on devra remplacer  $P$ ,  $R$ ,  $Z$  et  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  par leurs valeurs (2) et (4), permettront d'éliminer  $N$ ,  $u$ ,  $\frac{du}{d\varphi}$ , et l'on obtiendra ainsi l'équation qui, jointe à l'équation (1), déterminera la nature de la trajectoire; mais il peut arriver qu'il devienne inutile d'employer ces quatre équations, équations dont l'une rentre dans les autres, et qu'il soit plus

avantageux de substituer à l'une des trois dernières celle que l'on obtient en différenciant la première, ce qui se présente notamment dans l'un des exemples suivants.

*Mouvement d'un point sur un hélicoïde gauche.*

Soit

$$z = k\varphi$$

l'équation de l'hélicoïde,  $k$  étant une constante.

Comme on a  $\lambda = 90^\circ$ , la réaction  $N$  disparaît de l'équation (8), qu'il convient alors de joindre à l'équation (3); ces équations deviennent

$$(3') \quad \left(r^2 + k^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2}\right) u = 2\Psi + c,$$

$$8') \quad \frac{du}{d\varphi} \frac{dr}{d\varphi} + 2u \left(\frac{dr}{d\varphi} - r\right) = 2R.$$

En différenciant la première, on trouve

$$\left(r^2 + k^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2}\right) \frac{du}{d\varphi} + 2u \frac{dr}{d\varphi} \left(r + \frac{d^2r}{d\varphi^2}\right) = 2 \left(R \frac{dr}{d\varphi} + Pr + Q\dot{k}\right),$$

d'où, en retranchant l'équation (8'), multipliée par  $\frac{dr}{d\varphi}$ ,

$$(9') \quad \left(r^2 + k^2\right) \frac{du}{d\varphi} + 4ur \frac{dr}{d\varphi} = 2(Pr + Q\dot{k}),$$

équation qui, dans certains cas, pourra être substituée avec avantage à l'une des équations (3') et (8').

1° *La force qui sollicite le mobile est dirigée suivant le rayon  $r$  et est une fonction de ce rayon.*

Soit donc  $\Psi = f(r)$ ,  $f$  étant une fonction donnée du rayon; comme on a  $P = 0$ ,  $Q = 0$ , il convient d'employer l'équation (9'), qui se réduit à

$$\left(r^2 + k^2\right) \frac{du}{dr} + 4ur = 0,$$

d'où

$$u = \frac{A}{r^2 + k^2},$$

A étant une constante positive dépendant des conditions initiales du mouvement.

L'équation (3') devient alors

$$A \left( r^2 + k^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2} \right) \frac{1}{(r^2 + k^2)^2} = 2f(r) + c,$$

d'où

$$(10) \quad \varphi = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + k^2) [2f(r) + c - A(r^2 + k^2)]}}.$$

Ce problème se trouve ainsi ramené à une quadrature.

Si l'on suppose  $f(r) = 0$ , l'équation (10) devient, en comprenant dans C la constante  $-Ak^2$ ,

$$\varphi = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{(r^2 + k^2) (C - Ar^2)}},$$

ce qui est l'équation générale des lignes géodésiques de l'hélicoïde.

2° *L'axe de l'hélicoïde est vertical et le point mobile n'est sollicité que par la pesanteur.*

On a  $Q = -g$ ,  $R = 0$ ,  $P = 0$ , et les équations (8') et (9) deviennent

$$\frac{du}{d\varphi} \frac{dr}{d\varphi} + 2u \left( \frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r \right) = 0,$$

$$(r^2 + k^2) \frac{du}{d\varphi} + 4ur \frac{dr}{d\varphi} = -2gk,$$

d'où, par l'élimination de  $\frac{du}{d\varphi}$ ,

$$u = \frac{-gk \frac{dr}{d\varphi}}{\left( \frac{d^2 r}{d\varphi^2} - r \right) (r^2 + k^2) - 2r \frac{dr^2}{d\varphi^2}};$$

mais on a aussi

$$\left( r^2 + k^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2} \right) u = -2gk(\varphi + \alpha),$$

$z$  étant une constante; d'où, pour l'équation cherchée,

$$\left(r^2 + k^2 + \frac{dr^2}{a\varphi^2}\right) \frac{dr}{d\varphi} = 2(\varphi + a) \left[ \left(\frac{d^2r}{d\varphi^2} - r\right) (r^2 + k^2) - 2r \frac{dr^2}{d\varphi^2} \right].$$

*Mouvement d'un point pesant sur la surface intérieure  
d'un cylindre incliné sur l'horizon.*

Nous supposons le plan  $xOz$  vertical; si  $i$  est l'angle que forme l'axe  $Oz$  du cylindre avec l'horizon, on a, pour la distance  $\zeta$  du point mobile au plan horizontal passant par  $Oy$ ,

$$\zeta = z \sin i + r \cos \varphi \cos i,$$

par suite

$$\Psi = g(z \sin i + r \cos \varphi \cos i),$$

$$P = \frac{d\Psi}{r d\varphi} = -g \sin \varphi \cos i.$$

Supposons que le mobile parte du repos, que l'on fasse passer le plan  $xOy$  par sa position initiale, et soit  $\varphi_0$  la valeur de  $\varphi$  correspondant à cette position. Les équations (3) et (7) nous donneront

$$u \left( r^2 + \frac{dz^2}{d\varphi^2} \right) = 2g[z \sin i + r(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \cos i],$$

$$\frac{r}{2} \frac{du}{d\varphi} = -g \sin \varphi \cos i;$$

de cette dernière on tire

$$u = \frac{2g \cos i}{r} (\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

et, en portant cette valeur dans la première, on trouve

$$\frac{dz^2}{d\varphi^2} = \frac{r \operatorname{tang} i z}{\cos \varphi - \cos \varphi_0},$$

d'où

$$z = \frac{1}{4} r \operatorname{tang} i \left[ \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} \right]^2.$$

*Formules applicables au cas où la surface est de révolution.*

Soit  $z = f(r)$  l'équation de la surface; comme on a  $\mu = 90^\circ$ , il sera convenable d'employer les équations (3) et (7) et celle qui résulte de la différentiation de la première, ce qui donne

$$u \left\{ r^2 + [1 + f'(r)^2] \frac{dr^2}{d\varphi^2} \right\} = 2\Psi + C,$$

$$\frac{r}{2} \frac{du}{d\varphi} + 2u \frac{dr}{d\varphi} = P,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ r^2 + [1 + f'(r)^2] \frac{dr^2}{d\varphi^2} \right\} \frac{du}{d\varphi} + u \left\{ r \frac{dr}{d\varphi} + [1 + f'(r)^2] \frac{dr}{d\varphi} \frac{dr}{d\varphi} + f(r) f'(r) \frac{dr^3}{d\varphi^3} \right\} \\ = R \frac{dr}{d\varphi} + Pr + Z f'(r) \frac{dr}{d\varphi}. \end{aligned}$$

On obtiendra l'équation cherchée en éliminant entre les précédentes  $u$  et  $\frac{du}{d\varphi}$ .

Si  $P = 0$ , la seconde de ces équations donne

$$ur^4 = \text{const. } A,$$

ce qui devait être, en vertu du principe des aires; la troisième devient inutile, et la première donne

$$\left\{ r^2 + [1 + f'(r)^2] \frac{dr^2}{d\varphi^2} \right\} \frac{A}{r^4} = 2\Psi + C.$$

On voit, d'après cela, que l'équation générale des lignes géodésiques sera de la forme

$$r^2 + [1 + f'(r)^2] \frac{dr^2}{d\theta^2} = Br^4,$$

$B$  étant une constante

*Coordonnées sphériques.*

Soient (fig. 2) :

$Om = r$  le rayon vecteur du mobile;

$n$  sa projection sur le plan  $xOy$ ;

$\varphi$  l'angle formé par  $on$  avec  $Ox$ ;

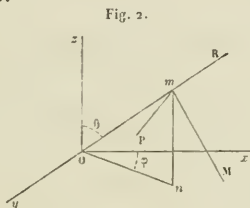
$\theta$  l'angle  $mOz$ ;

$$(1) \quad F(r, \varphi, \theta) = 0$$

l'équation de la surface;

$R, M, P$  les composantes de la force extérieure  $F$  suivant  $r$ , la méridienne et le parallèle;

$\Psi(r, \varphi, \theta)$  le potentiel.



Le travail élémentaire de la force  $F$  étant

$$Rdr + Mrd\theta + Pr \sin\theta d\varphi = \frac{\partial\Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} d\theta + \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} d\varphi,$$

on a les relations

$$(2) \quad R = \frac{\partial\Psi}{\partial r}, \quad M = \frac{\partial\Psi}{r\partial\theta}, \quad P = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}.$$

Si nous désignons par  $\lambda, \mu, \nu$  les angles que forme la normale avec les directions de  $R, M, P$ , on a, en exprimant que le travail élémentaire de la réaction  $N$  est nul pour tout déplacement sur la surface,

$$N \cos\lambda \delta r + N \cos\mu \cdot r \delta\theta + N \cos\nu r \sin\theta \delta\varphi = 0;$$

mais on a aussi

$$\frac{\partial F}{\partial r} \delta r + \frac{\partial F}{r \partial \theta} r \delta \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} r \sin \theta \delta \varphi = 0,$$

d'où

$$(3) \quad \cos \lambda = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \cos \mu = \frac{1}{\Delta r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad \cos \nu = \frac{1}{\Delta r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi},$$

en posant

$$(4) \quad \Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

Le principe des forces vives donne

$$\frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}{dt^2} = 2\Psi + C,$$

et, en posant  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\omega^2 = u$ , cette équation prend la forme suivante :

$$(5) \quad u \left( \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \right) = 2\Psi + C.$$

Si l'on projette le mouvement du point sur le plan  $xOy$ , et que l'on prenne les moments par rapport à l'origine, on trouve

$$\frac{d\omega r^2 \sin^2 \theta}{dt} = (P + N \cos \nu) r \sin \theta,$$

d'où

$$(6) \quad \frac{1}{2} \frac{du}{d\varphi} r \sin \theta + 2u \frac{dr \sin \theta}{d\varphi} = P + N \cos \nu.$$

Le point  $n$  pouvant être considéré comme animé d'un mouvement relatif suivant la droite  $On$  qui tourne avec la vitesse angulaire  $\omega$ , on a, en remarquant que les accélérations angulaire et centrifuge composées ne donnent que des composantes perpendiculaires à  $On$ ,

$$\frac{d^2 r \sin \theta}{dt^2} = R \sin \theta + M \cos \theta + N (\cos \lambda \sin \theta + \cos \mu \cos \theta) + \omega^2 r \sin \theta,$$

ou

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} r \sin \theta \frac{du}{d\varphi} + u \frac{dr \sin \theta}{d\varphi} \\ = R \sin \theta + M \cos \theta + N (\cos \lambda \sin \theta + \cos \mu \cos \theta) + ur \sin \theta. \end{array} \right.$$



Enfin, en projetant le mouvement sur  $Oz$ , on a

$$\frac{d^2 r \cos \theta}{dt^2} = R \cos \theta - M \sin \theta + N (\cos \lambda \cos \theta - \cos \mu \sin \theta),$$

ou

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{r}{2} \cos \theta \frac{du}{d\varphi} + u \frac{dr \cos \theta}{d\varphi} \\ = R \cos \theta - M \sin \theta + N (\cos \lambda \cos \theta - \cos \mu \sin \theta). \end{cases}$$

En éliminant  $u$ ,  $\frac{du}{dt}$  et  $N$  entre les équations (5), (6), (7), (8), dont l'une rentre dans les autres, on obtiendra l'équation cherchée.

Ces équations offrant une certaine complication, nous ne les appliquerons qu'à la recherche des lignes géodésiques tracées sur la surface d'un sphéroïde, question qui a été traitée pour la première fois par Laplace.

Si nous désignons par  $v$  la vitesse initiale, les équations (5), (6), (8), les seules dont nous ferons usage, deviennent, lorsque le mobile n'est sollicité par aucune force extérieure,

$$(5') \quad u \left( \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} + r^2 \sin^2 \theta \right) = v^2,$$

$$(6') \quad r \sin \theta \frac{du}{d\varphi} + 4u \frac{dr \sin \theta}{d\varphi} = 2N \cos \nu,$$

$$(8') \quad r \cos \theta \frac{du}{d\varphi} + 2u \frac{dr \cos \theta}{d\varphi} = 2N (\cos \lambda \cos \theta - \cos \mu \sin \theta),$$

d'où, par l'élimination de  $N$ ,

$$(9) \quad \frac{r \sin \theta \frac{du}{d\varphi} + 4u \frac{dr \sin \theta}{d\varphi}}{r \cos \theta \frac{du}{d\varphi} + 2u \frac{dr \cos \theta}{d\varphi}} = \frac{\cos \nu}{\cos \lambda \cos \theta - \cos \mu \sin \theta}.$$

Nous n'avons plus maintenant qu'à considérer les équations (5') et (9), entre lesquelles nous devons éliminer  $u$ .

Considérons d'abord le cas d'une sphère dont, pour simplifier, nous supposons le rayon égal à l'unité; comme on a  $\nu = 90^\circ$ , l'équa-

tion (9') devient

$$(10) \quad \sin \theta \, du + 4u \, d\theta \sin \theta = 0,$$

d'où

$$(11) \quad u = \frac{h}{\sin^4 \theta}, \quad \frac{du}{d\theta} = -\frac{4h \cos \theta}{\sin^5 \theta} = -4u \cot \theta,$$

$h$  désignant une constante. En portant la valeur de  $u$  dans l'équation (5'), on trouve

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} d\varphi &= \frac{d\theta}{\pm \sin \theta \sqrt{\frac{v^2}{h} \sin^2 \theta - 1}} = \frac{d\theta}{\pm \sin \theta \sqrt{\left(\frac{v^2}{h} - 1\right) - \cos^2 \theta}} \\ &= \pm \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{v^2}{h} - 1 - \cos^2 \theta}}; \end{aligned} \right.$$

d'où, en appelant  $\alpha$  une nouvelle constante,

$$(13) \quad \left(\frac{v^2}{h} - 1\right) \sin(\varphi + \alpha) = \cot \theta,$$

qui est bien l'équation polaire d'un plan passant par l'origine des coordonnées.

Abordons maintenant la question des sphéroïdes, et soit

$$r = 1 + \varepsilon$$

l'équation de la surface de l'un de ces solides,  $\varepsilon$  étant une fonction de  $\theta$  et  $\varphi$ , qui ne peut prendre que des valeurs assez petites pour que l'on puisse en négliger la seconde puissance; nous supposons également que les dérivées partielles de  $\varepsilon$  sont du même ordre de grandeur que cette fonction.

Nous avons ici  $F = r - (1 + \varepsilon)$ ; par suite, au degré d'approximation convenu,

$$(14) \quad \cos \lambda = 1, \quad \cos \mu = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta}, \quad \cos \nu = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi}.$$

L'équation (9) peut d'abord se réduire à la suivante, en prenant

maintenant  $\theta$  pour variable :

$$(1 + \varepsilon) \sin \theta \frac{du}{d\theta} + \zeta u \frac{d(1 + \varepsilon \sin \theta)}{d\theta} = \frac{\cos \nu}{\cos \theta} \left( -2u \sin \theta + \cos \theta \frac{d\nu}{d\theta} \right),$$

ou, en remarquant que l'on a

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{\partial z}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \frac{d\nu}{d\theta} = - \left( \cos \mu + \cos \nu \sin \theta \frac{d\nu}{d\theta} \right),$$

et, développant,

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{du}{d\theta} + \zeta u \frac{d \sin \theta}{d\theta} \\ = \frac{du}{d\theta} (\cos \nu - \varepsilon \sin \theta) + 2u \left( 2 \sin \theta \cos \mu - 2\varepsilon \cos \theta - \cos \nu \operatorname{tang} \theta \right. \\ \left. + 2 \cos \nu \sin^2 \theta \frac{d\nu}{d\theta} \right). \end{aligned}$$

Au degré d'approximation convenu, on peut, d'après la seconde des formules (11), remplacer, dans le second membre de cette équation,

$\frac{du}{d\theta}$  par  $- \zeta u \cot \theta$ , et il vient alors

$$(15) \left\{ \begin{aligned} \sin \theta \frac{du}{d\theta} + \zeta u \frac{d \sin \theta}{d\theta} \\ = 2u \left[ 2 \sin \theta \cos \mu - \cos \nu \operatorname{tang} \theta + 2 \cot \theta \right] - 2 \cos \nu \sin^2 \theta \frac{d\nu}{d\theta}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, en remplaçant, dans le même membre,  $u$  et  $\frac{d\nu}{d\theta}$  par leurs valeurs (11) et (12), on trouve

$$(16) \left\{ \begin{aligned} \sin \theta \frac{du}{d\theta} + \zeta u \frac{d \sin \theta}{d\theta} \\ = \frac{2h}{\sin^4 \theta} \left[ 2 \cos \theta \cos \mu - \cos \nu \operatorname{tang} \theta + 2 \cot \theta \right] \mp \frac{2 \cos \nu \sin \theta}{\sqrt{\frac{c^2}{h^2} \sin^2 \theta - 1}}. \end{aligned} \right.$$

Si, dans les expressions des  $\cos \mu$  et  $\cos \nu$ , on peut éliminer l'angle  $\varphi$  au moyen de l'équation (13), on aura une équation linéaire en  $u$  que l'on intégrera; on développera ensuite les exponentielles en série, en s'arrêtant aux premiers termes de l'ordre du second membre; on

98 H. RESAL. — MOUVEMENT D'UN POINT MATERIEL SUR UNE SURFACE.  
 substituera ensuite la valeur de  $u$  dans l'équation (3') qui, dans le cas actuel, donne

$$(17) \quad \varphi = \int \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{v^2}{u} \frac{1-2\varepsilon}{u} - \sin^2 \theta}},$$

ce qui fera connaître  $\varphi$  en fonction de  $\theta$ .

Supposons, par exemple, que l'on fasse passer le plan  $zOx$  par deux points de la courbe ou par la tangente en l'un de ses points, sauf à déterminer les constantes en conséquence;  $\varphi$  et  $\frac{d\varphi}{d\theta}$  seront de l'ordre de  $\varepsilon$ ;  $\cos\mu$  et  $\cos\nu$ , dans l'équation (14), seront, par suite, indépendants de  $\varphi$ , et l'on aura

$$(18) \quad \sin\theta \frac{du}{d\theta} + 4u \frac{d \sin\theta}{d\theta} = 2u[2 \sin\theta \cos\mu - (\tan\theta + 2 \cot\theta) \cos\nu].$$

Nous pourrions représenter  $u$  par la première des formules (11), en considérant  $h$  comme une fonction de  $\theta$ , ce qui nous donnera

$$\begin{aligned} \frac{dh}{h} &= \frac{2}{\sin\theta} [2 \cos\theta \cos\mu - (\tan\theta + 2 \cot\theta) \cos\nu], \\ h &= H e^{2 \int [2 \cos\theta \cos\mu - (\tan\theta + 2 \cot\theta) \cos\nu] d\theta}. \end{aligned}$$

$H$  étant une constante, et le problème se trouve ainsi résolu.

*Mémoire sur les lignes de faite et de thalweg que l'on est conduit à considérer en topographie;*

PAR M. BRETON (DE CHAMP),

Ingenieur en chef des Ponts et Chaussées en retraite.

*Exposé de la question.*

1. Le problème auquel ce Mémoire est consacré peut s'énoncer en ces termes : *Une surface étant donnée par son équation, trouver les différentes lignes, soit de faite, soit de thalweg, qu'elle présente dans son étendue.* Lorsque je me décidai, il y a une trentaine d'années, à publier la première édition de mon *Traité du nivellement*, j'avais cherché vainement la solution de ce problème dans les ouvrages qui étaient alors le plus répandus. On comprend combien il dut m'en coûter de laisser subsister dans cette première publication une lacune de cette importance.

Quelques années plus tard, je fus conduit à reconnaître que les notions admises par les auteurs sur les faites et les thalwegs étaient, en réalité, souvent inexactes. Après avoir appelé l'attention des géomètres sur cet état de choses, je m'appliquai à sonder moi-même la question. Ce fut dans le courant de l'année 1867 que je parvins à démêler, pour la première fois, le véritable caractère mathématique des lignes qu'il s'agissait de trouver. Cette découverte m'a permis de donner enfin l'essai de solution du problème ci-dessus, qui forme la Note XII dans la troisième édition de mon *Traité du nivellement*, publiée en 1873.

Je me propose de développer ici cette théorie et de l'appliquer à des exemples convenablement choisis.

2. Dans tout ce qui va suivre, on supposera qu'il s'agit d'une surface

rapportée à trois axes  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$  perpendiculaires entre eux; les deux premiers  $ox$ ,  $oy$  seront regardés comme horizontaux, et le troisième  $oz$  comme vertical. De plus, il sera nécessaire d'avoir bien présentes à l'esprit les notions ci-après relatives aux *lignes de niveau* et aux *lignes de plus grande pente*.

3. Les lignes de niveau d'une surface sont les sections que l'on fait en la coupant par des plans horizontaux. Si l'équation de la surface proposée peut être mise sous la forme

$$(f) \quad z = f(x, y).$$

les équations de la ligne de niveau située dans le plan ayant pour ordonnée  $z_0$  seront

$$z = z_0, \quad f(x, y) = z_0$$

On tire de cette dernière

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx} = 0.$$

en faisant attention que, par hypothèse,  $z_0$  est une constante. C'est là l'équation différentielle des lignes de niveau. En remplaçant par  $p$  et  $q$  les deux dérivées partielles, et en posant  $dy = y' dx$ , cette équation devient

$$(n) \quad p + qy' = 0.$$

Si l'équation de la surface est

$$(F) \quad F(x, y, z) = 0,$$

on obtiendra l'équation différentielle des lignes de niveau en éliminant  $z$  entre les équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad \frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} = 0.$$

4. On appelle *ligne de plus grande pente* d'une surface toute courbe qui, en chacun de ses points, a pour tangente celle des tangentes à la surface, en ce même point, qui fait le plus grand angle avec le plan

horizontal. Il est facile de conclure de cette définition que la tangente à la ligne de plus grande pente qui passe par un point  $m$  de la surface est perpendiculaire à la trace horizontale du plan tangent mené par ce point  $m$ , et qu'elle est aussi perpendiculaire à la tangente menée par ce même point à la ligne de niveau qui y passe.

De là ce théorème : *Toute ligne de plus grande pente d'une surface coupe à angle droit toutes les lignes de niveau qu'elle rencontre sur la même surface; et, réciproquement, toute courbe qui jouit de cette propriété est une ligne de plus grande pente.*

§. On peut ajouter, d'après les hypothèses admises ci-dessus, que les projections de ces deux systèmes de lignes sur le plan horizontal  $xoy$  formeront deux réseaux tels, que toute ligne de l'un coupera orthogonalement toutes les lignes de l'autre.

Il résulte de cette dernière propriété que, si l'équation de la surface proposée peut s'écrire

$$(f) \quad z = f(x, y),$$

de sorte que l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de niveau soit

$$(n) \quad p + qy' = 0,$$

comme on l'a vu ci-dessus, l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente sera

$$(i) \quad py' - q = 0.$$

En effet, si l'on multiplie la valeur de  $y'$  tirée de cette équation par celle que donne la valeur de  $y'$  tirée de cette équation précédente, et qu'au produit on ajoute l'unité, on obtient pour somme zéro; ce qui est, comme on le sait, la condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de ces deux systèmes se coupent orthogonalement.

Si l'équation de la surface doit être employée sous la forme

$$(F) \quad F(x, y, z) = 0,$$

on aura pour l'équation différentielle de la projection horizontale des

lignes de plus grande pente, par un raisonnement semblable,

$$y' \frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dy} = 0.$$

Il restera à éliminer  $z$  entre cette dernière équation et celle de la surface. L'équation finale ainsi obtenue pourra être mise sous la forme

$$\varphi(x, y, y') = 0.$$

Toutes les fois que, dans la suite de ce travail, il s'agira de l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente d'une surface, on devra entendre par là une équation telle que ( $\varphi$ ), ramenée, comme je viens de l'expliquer, à ne renfermer que  $x$ ,  $y$  et  $y'$ , sans  $z$ .

*Caractère géométrique par lequel les lignes de faite et de thalweg se distinguent essentiellement des lignes ordinaires de plus grande pente.*

6. Lorsqu'on cherche à se rendre compte de la manière dont est composé le réseau des lignes de plus grande pente d'une surface, on arrive bientôt à reconnaître dans l'étendue de celle-ci un certain nombre de régions distinctes, auxquelles nous donnerons le nom de *versants*, à cause de leur analogie avec les versants naturels, qui jouent un si grand rôle dans le système orographique et hydrographique d'une contrée.

Nous ajouterons, en poursuivant cette analogie, que chacun de ces versants *géométriques* se termine dans sa partie supérieure à une ligne de faite, et dans sa partie inférieure à une ligne de thalweg.

Ces lignes de faite et de thalweg appartiennent au réseau des lignes de plus grande pente de la surface; mais elles se distinguent essentiellement des autres lignes de ce réseau, c'est-à-dire des lignes ordinaires de plus grande pente, par un caractère géométrique dont l'importance ne saurait être méconnue.

7. Considérons, pour fixer les idées, une ligne de faite sépa-



deux versants opposés. Toute ligne ordinaire de plus grande pente issue d'un point situé sur l'un de ces versants, aussi près qu'on le voudra de cette ligne de faïte, descend, en s'éloignant de cette dernière, plus ou moins rapidement, pour se rapprocher finalement de la ligne de thalweg qui règne à la base du versant. On peut raisonner d'une manière analogue sur les lignes ordinaires de plus grande pente qui, ayant leur point de départ dans le voisinage d'une ligne de thalweg, remontent en suivant les déclivités des deux versants qu'elle sépare, vers les lignes de faïte qui couronnent ces mêmes versants.

Ainsi donc, toute ligne ordinaire de plus grande pente traverse dans sa largeur le versant dans lequel elle pénètre, s'éloignant du faïte pour se rapprocher du thalweg, ou inversement; mais rien de semblable n'a lieu pour les lignes de faïte et de thalweg, qui sont les limites séparatives des différents versants dont se compose la surface.

*Sous quelle forme ce caractère se retrouve dans l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente.*

8. L'hypothèse la plus large que l'on puisse faire, au sujet de la relation que l'on doit concevoir comme existant entre l'abscisse  $x$  et l'ordonnée  $y$  d'un point de la projection horizontale d'une ligne de faïte ou de thalweg, consiste à la représenter par une équation d'ordre indéfini

$$(\psi) \quad \psi(x, y, y', y'', y''', \dots) = 0,$$

entre  $x, y, y'$  et un certain nombre de dérivées  $y'', y''', \dots$ , en faisant

$$d^2y = y'' dx^2, d^3y = y''' dx^3, \dots$$

D'après ce qui a été expliqué ci-dessus, cette équation ne subsistera que pour certaines lignes de plus grande pente, et *non pour toutes indistinctement*, comme il arrive pour l'équation

$$(\varphi) \quad \varphi(x, y, y') = 0.$$

Comme il sera toujours possible de tirer de celle-ci  $y'$  en fonction de

$x$  et de  $y$ , la substitution de cette valeur dans  $(\psi)$  en fera disparaître  $y'$ . En différenciant ensuite  $(\varphi)$  par rapport à  $x$ , et faisant la même substitution dans le résultat, on aura  $y''$  en fonction de  $x$  et de  $y$ ; et l'on pourra également faire disparaître de  $(\psi)$  cette dérivée. Il est clair qu'en continuant ainsi de proche en proche on arrivera à une transformée

$$\Psi \qquad \Psi(x, y) = 0,$$

qui ne renfermera plus que  $x$  et  $y$ . Cette dernière équation devra vérifier l'équation différentielle

$$(\varphi) \qquad \varphi(x, y, y') = 0,$$

qui s'applique à *toutes* les lignes de plus grande pente. Elle en sera donc une *intégrale*, et cette intégrale, d'après la nature même des opérations par lesquelles on l'aura obtenue, *ne renfermera pas de constante arbitraire*.

Cette équation  $(\varphi)$  pourra d'ailleurs être vérifiée en égalant à zéro, non-seulement la fonction  $(\Psi)$ , mais aussi celles de ses dérivées totales qui s'y trouveront associées. Enfin il pourra être utile aussi de recourir à celles de l'équation  $(\varphi)$  [\*].

9. On peut donc énoncer ce théorème: *Les équations des projections horizontales des lignes de faite et de thalweg d'une surface sont nécessairement comprises parmi celles des intégrales de l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente de cette surface, qui peuvent être obtenues sans passer par l'intégrale générale de cette équation.*

Les exemples qui vont être présentés montreront comment ce théorème doit être entendu et appliqué. Ils achèveront en même temps d'éclaircir ce qui aurait pu paraître obscur dans l'exposé ci-dessus.

---

[\*] Cette remarque a été omise, par inadvertance, dans la Note XII de mon *Traité du nivellement* (troisième édition, 1873).

## PROBLÈME I.

Trouver les lignes de faïte et de thalweg de l'ellipsoïde qui a pour équation

$$(F) \quad F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

10. Pour obtenir l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente d'une surface dont l'équation est ainsi présentée, il faut (3) éliminer  $z$  entre les deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad y' \frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dy} = 0;$$

ce qui donne

$$(\varphi) \quad \varphi(x, y, y') = \frac{y'x}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 0.$$

Cette équation a pour intégrale générale

$$y^{b^2} = (\gamma x)^{a^2},$$

$\gamma$  désignant une constante arbitraire. Mais cela ne nous dit point quelles sont les valeurs de cette constante qui répondent à la question proposée.

D'après notre théorème (9), nous remarquerons qu'il se présente immédiatement deux manières de vérifier l'équation  $\varphi(x, y, y') = 0$ . L'une consiste à faire  $y = 0$  et  $y' = 0$ , ce qui a lieu pour la section principale contenue dans le plan  $zox$ ; l'autre à faire  $x = 0, y' = \infty$ , ce qui a lieu pour la section principale contenue dans le plan  $yoiz$ .

11. Chacun de ces plans partage la surface en deux versants symétriques, séparés par une ligne de faïte au-dessus du plan  $oxy$  et par une ligne de thalweg au-dessous de ce plan.

## PROBLÈME II.

Trouver les lignes de faite et de thalweg de la surface cylindrique qui a pour équation

$$(F) \quad F(x, y, z) = \frac{x - mz}{a^2} + \frac{y - nz}{b^2} - 1 = 0$$

12. Ici nous avons (3) à éliminer  $z$  entre les équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad y' \frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dy} = 0.$$

Cette dernière donne, en faisant les opérations indiquées.

$$y' \frac{x - mz}{a^2} - \frac{y - nz}{b^2} = 0;$$

d'où

$$z = \frac{b^2 xy' - a^2 y}{b^2 my' - a^2 n}, \quad x - mz = \frac{a^2 my' - nx}{b^2 my' - a^2 n}, \quad y - nz = \frac{b^2 y' my' - nx'}{b^2 my' - a^2 n}.$$

Ces expressions de  $x - mz$  et de  $y - nz$  étant substituées dans l'équation de la surface, il vient, pour l'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de plus grande pente,

$$(2) \quad \varphi(x, y, y') = [a^2 + b^2 y'^2] (my' - nx)^2 - (b^2 my' - a^2 n)^2 = 0.$$

Cette dernière ne nous offrant immédiatement aucune intégrale de la nature de celles que suppose l'énoncé du théorème auquel nous avons été conduit (9), nous égalons à zéro (8) la dérivée du premier membre de cette équation prise par rapport à  $x$ , en regardant  $y$  et  $y'$  comme des fonctions de  $x$ ; il vient ainsi

$$(2') \quad \begin{cases} [(my' - nx)^2 y' - nx(b^2 my' - a^2 n)] b^2 y'' \\ + (my' - nx)(my' - n)(a^2 + b^2 y'^2) = 0. \end{cases}$$

15. On satisfait à cette équation en posant

$$my' - n = 0, \quad \gamma'' = 0;$$

cette dernière égalité est une conséquence de la première.

De ce que l'on a  $\gamma'' = 0$ , nous devons conclure que les lignes cherchées sont en projection horizontale des lignes droites. La relation  $my' - n = 0$  nous apprend que ces lignes sont parallèles à la droite dont les projections horizontales ont pour équations

$$x = mz, \quad y = nz;$$

et il s'ensuit, par une conséquence facile à saisir, que les lignes cherchées ne peuvent être que des génératrices de la surface.

Pour déterminer quelles sont ces génératrices, il suffit de substituer dans l'équation ( $\varphi$ ), au lieu de  $\gamma'$ , sa valeur tirée de la relation  $my' - n = 0$ ; il vient ainsi

$$(a^2 m^2 + b^2 n^2)(m\gamma - n.x)^2 - (a^2 - b^2)^2 m^2 n^2 = 0;$$

d'où l'on tire

$$m\gamma - n.x = \pm \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2 n^2}} \frac{mn}{a^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{n}{m}.x \pm \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2 n^2}} \frac{n}{a^2}.$$

La question admet donc deux solutions, lesquelles répondent respectivement à deux génératrices de la surface proposée.

Ce sont là les équations des projections horizontales des lignes demandées. D'après ce qui précède, ces équations vérifient l'équation  $\varphi(x, \gamma, \gamma') = 0$  de la projection horizontale des lignes de plus grande pente.

Pour achever de déterminer ces génératrices, nous rappellerons qu'elles ne peuvent être des lignes de faïte ou de thalweg, que si elles satisfont à la condition de couper orthogonalement les sections horizontales qu'elles rencontrent. Considérons dans le plan  $xOy$  l'ellipse représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

(1).

qui répond à  $z = 0$ ; l'élément de cette courbe, au point qui a pour coordonnées  $x_0, y_0$ , fait avec l'axe  $ox$  un angle dont la tangente trigonométrique a pour expression

$$-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

La projection horizontale de la génératrice passant par le même point fait avec le même axe  $ox$  un angle qui a pour tangente trigonométrique  $\frac{n}{m}$ . Pour que cette projection soit perpendiculaire à l'élément cherché, il faut que l'on ait

$$-\frac{n}{m} \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} + 1 = 0.$$

De cette relation et de l'équation ci-dessus on tire

$$x_0 = \frac{\pm a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2 n^2}}, \quad y_0 = \frac{\pm b^2 a}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2 n^2}},$$

expressions qui satisfont à la relation

$$m y_0 - n x_0 = \mp \frac{(a^2 - b^2) m n}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2 n^2}},$$

comme on devait s'y attendre.

14. Dans ce problème, la surface proposée se divise en deux versants. La ligne de faite  $mm'$ , d'une part, et la ligne de thalweg  $mn'$ , d'autre part, situées dans un même plan diamétral, déterminent ce partage. Toute ligne de plus grande pente  $aa'$ , qui part d'un point  $a$  voisin de la ligne de faite  $mm'$ , et situé à droite de cette ligne, est formée en projection horizontale de deux branches réunies par un point de rebroussement  $a'$  qui se trouve du même côté sur le contour apparent de la surface. A gauche de la ligne de faite, toute ligne de plus grande pente  $bb'b''$  présente en projection horizontale deux branches réunies par un point de rebroussement  $b'$  situé sur le contour apparent de la surface, pareillement à gauche de la ligne de faite. Les portions des lignes de plus grande pente situées sur la partie

convexe de la surface, doivent être considérées comme extérieures à celle-ci. Les autres branches avec la ligne de thalweg doivent être considérées comme *intérieures*.

## PROBLÈME III.

*Trouver les lignes de faïte et de thalweg de la surface conique qui a pour équation*

$$(F) \quad F(x, y, z) = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{z}{x} = 0,$$

*f désignant une fonction quelconque.*

13. La surface représentée par cette équation a pour sommet l'origine des coordonnées. Pour simplifier l'écriture, remplaçons  $\frac{y}{x}$  par  $\alpha$ . L'équation

$$(5) \quad y' \frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dy} = 0$$

donne

$$y' \left[ -\frac{z}{x} f'(\alpha) + \frac{z}{x^2} \right] + \frac{1}{x} f'(\alpha) = 0.$$

On trouve, après avoir supprimé  $\alpha$ , qui est dénominateur commun, et remplacé  $\frac{z}{x}$  par  $f(\alpha)$ , en vertu de l'équation (F),

$$(\varphi) \quad y' [f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)] + f'(\alpha) = 0.$$

Si maintenant (8) nous égalons à zéro, comme nous l'avons fait (12) dans le Problème II, la dérivée de cette équation ( $\varphi$ ), prise en regardant  $y'$  et  $y''$  comme deux fonctions de  $\alpha$ , il vient

$$(\varphi') \quad y'' [f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)] - \frac{1 + \alpha y'}{x} [y' - \alpha] f''(\alpha) = 0.$$

On satisfait immédiatement à cette dernière équation en posant

$$y' - \alpha = 0, \quad y'' = 0.$$

La première de ces deux conditions nous apprend que les valeurs de  $z$  qui résolvent la question sont les racines de l'équation

$$\alpha f(\alpha) = (1 + \alpha^2) f'(\alpha) = 0,$$

à laquelle on est conduit, en faisant  $y' = \alpha$  dans l'équation (2). La condition  $y'' = 0$  signifie que les lignes cherchées sont nécessairement des génératrices de la surface.

16. Ces génératrices jouissent, comme cela doit être, de la propriété de couper à angle droit les lignes de niveau de la surface. En effet, l'équation différentielle de la projection horizontale de ces lignes de niveau, laquelle s'obtient (3) par l'élimination de  $z$  entre les équations

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dx} + y' \frac{dF}{dy} = 0,$$

est

$$(y' - \alpha) f'(\alpha) + f(\alpha) = 0,$$

et l'on doit avoir

$$\alpha y' + 1 = 0.$$

Or il est facile de s'assurer que l'on a

$$\alpha y' + 1 = - \frac{\alpha f(\alpha) - (1 + \alpha^2) f'(\alpha)}{f'(\alpha)},$$

et nous savons par l'équation précédente (15) que le numérateur de cette expression est égal à zéro.

On conclut de ce qui précède que les lignes de faite et de thalweg d'une surface conique sont celles d'entre les génératrices de cette surface qui coupent à angle droit le contour de sa base.

La division de la surface en versants donne lieu à diverses remarques, analogues à celles qui terminent (14) le *Problème II*.



17. Il n'aura certainement pas échappé au lecteur qu'il existe une seconde manière de satisfaire à l'équation

$$(\varphi') \quad y'' [f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)] - \frac{1 + \alpha y'}{x} (y' - \alpha) f''(\alpha) = 0;$$

elle consiste à poser

$$1 + \alpha y' = 0, \quad y'' = 0.$$

L'équation  $(\varphi)$  se réduit alors à  $\frac{f(\alpha)}{x} = 0$ , ce qui exige que l'on ait  $f(\alpha) = 0$ , c'est-à-dire  $f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ , quel que soit  $\alpha$ , et par conséquent  $z = 0$ , auquel cas tous les points de la surface sont dans le plan  $xoy$ . Il ne s'agit plus, à proprement parler, d'une surface conique.

#### PROBLÈME IV.

*Trouver les lignes de faïte et de thalweg de la surface qui a pour équation*

$$(F) \quad F(x, y, z) = (x - R \cos \zeta)^2 + (y - R \sin \zeta)^2 - r^2 = 0.$$

(Cette surface est celle qu'engendre une circonférence de cercle horizontale de rayon  $r$ , dont le centre est assujéti à demeurer à la distance  $R$ , supposée constante de l'axe  $oz$ , tandis que la projection horizontale de cette ligne  $R$  fait un angle variable  $\zeta$  avec l'axe  $ox$ ,  $\zeta$  étant une fonction assignée de l'ordonnée  $z$  du plan de la circonférence génératrice).

18. Cela posé, l'équation ci-dessus donne

$$\frac{dF}{dx} = 2(x - R \cos \zeta), \quad \frac{dF}{dy} = 2(y - R \sin \zeta);$$

par suite l'équation (5)

$$y' \frac{dF}{dx} - \frac{dF}{dy} = 0,$$

devient

$$y'(x - R \cos \zeta) - (y - R \sin \zeta) = 0.$$

On en tire

$$x - R \cos \zeta = \frac{y - R \sin \zeta}{y'}.$$

Cette expression de  $x - R \cos \zeta$  étant substituée dans l'équation de la surface, il en résulte

$$y - R \sin \zeta = \frac{ry'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{et} \quad x - R \cos \zeta = \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}},$$

d'où

$$R \sin \zeta = y - \frac{ry'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{et} \quad R \cos \zeta = x - \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Ces deux dernières équations donnent, à cause que  $\sin^2 \zeta + \cos^2 \zeta = 1$ ,

$$R^2 = x^2 + y^2 + r^2 - \frac{2r(x + yy')}{\sqrt{1+y'^2}};$$

nous pouvons écrire, en conséquence,

$$(\varphi) \quad \varphi(x, y, y') = x^2 + y^2 + r^2 - R^2 - \frac{2r(x + yy')}{\sqrt{1+y'^2}} = 0.$$

19. On aperçoit immédiatement que cette équation s'intègre lorsqu'on pose

$$x^2 + y^2 + r^2 - R^2 = 0, \quad x + yy' = 0.$$

La première de ces deux conditions entraîne la seconde, qui est, abstraction faite du facteur 2, la dérivée de  $x^2 + y^2 + r^2 - R^2$ . Elle nous apprend que les lignes cherchées ont pour projection horizontale une circonférence de cercle de rayon  $\sqrt{R^2 - r^2}$ , dont le centre est à l'origine  $o$  des coordonnées.

20. Remarquons en passant que, dans le problème actuel, l'inté-

grale proprement dite de l'équation (7) s'obtient sans difficulté. Il suffit pour cela de poser  $ds = \pm dx \sqrt{1 + y'^2}$ , de sorte que  $ds$  sera la différentielle de l'arc de la projection horizontale d'une ligne de plus grande pente. En désignant par  $C$  une constante arbitraire, cette intégrale est, comme on peut s'en assurer par la différentiation,

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = e^{\pm \frac{s}{r} + C};$$

mais la connaissance de cette intégrale nous laisse dans l'ignorance sur la valeur de la constante  $C$ , comme on l'a vu déjà dans le Problème I. Si la méthode exposée dans ce Mémoire réussit, c'est précisément parce que les intégrales que l'on y emploie ne renferment pas de constantes arbitraires.

#### PROBLÈME V.

*Trouver les lignes de faîte et de thalweg de la surface conoïde qui a pour directrice rectiligne l'axe  $oz$  et pour plan directeur le plan  $xoy$ .*

21. Je dois faire observer que cet énoncé n'est pas complet. Pour achever de définir la surface, il faudrait ajouter une nouvelle condition, par exemple assujettir la génératrice à rencontrer une ligne donnée. J'ai laissé à dessein cette lacune dans l'énoncé.

L'équation de la surface peut ainsi être mise sous la forme

$$(f) \quad z = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

en désignant par  $f$  une fonction quelconque. On en tire (5) pour l'équation de la projection horizontale des lignes de plus grande pente

$$(7) \quad py' - q = - \frac{(yy' + x)}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

ou plus simplement, en supprimant le facteur  $-\frac{1}{x^2} f' \left( \frac{y}{x} \right)$ ,

$$(\varphi) \quad \varphi(x, y, y') = (yy' + x) = 0.$$

22. On satisfait à cette équation en coupant la surface projetée par une surface cylindrique à base circulaire, le rayon R de cette base pouvant être choisi à volonté. Ici nous sommes en présence d'une véritable indétermination. En effet, l'équation

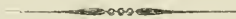
$$yy' + x = 0$$

est, à un facteur près, la dérivée de celle-ci :

$$y^2 + x^2 - R^2 = 0.$$

25. Le partage de la surface en *versants* a lieu suivant les génératrices horizontales. Dans chaque section cylindrique ainsi obtenue, la partie convexe située au-dessus de ces génératrices est une ligne de faite, la partie concave située au-dessous de ces mêmes génératrices est une ligne de thalweg.

Il peut sembler que dans une telle surface les génératrices les plus élevées sont aussi des lignes de faite. Mais, en examinant la question, on reconnaît sans peine que ces génératrices, tout en marquant de véritables *culminations* de la surface, ne sont cependant pas des lignes de faite dans le sens géométrique qu'on attache à cette expression. Par une raison semblable, les génératrices les plus basses ne sont pas des lignes de thalweg proprement dites.



*Recherches sur la poussée des terres et stabilité des murs  
de soutènement ;*

PAR M. H. RESAL.

I. Le calcul de la poussée produite par un massif prismatique de terre sur un mur, basé sur les principes posés par Coulomb, présente, dans le cas le plus général, une assez grande complication pour que jusqu'à présent on n'ait pas essayé de l'effectuer. Poncelet [\*] a éludé la difficulté en ayant recours à une construction géométrique très-ingénieuse, qui est devenue classique et que plus tard M. de Saint-Guilhem [\*\*] a généralisée en supposant que le massif supporte une surcharge.

Cependant, si l'on choisit convenablement l'inconnue, la détermination de la poussée, par suite celle de la butée, deviennent relativement simple, et c'est en partie ce que nous nous proposons de faire voir dans ce qui suit.

Nous considérerons, comme on le fait d'habitude, un massif de terre assez long pour que les conditions relatives à ses extrémités n'aient aucune influence sensible sur l'équilibre intérieur de la masse, en d'autres termes, pour qu'on puisse considérer le massif comme indéfini.

Mais, avant d'aborder la question, nous rappellerons les principes sur lesquels on fait reposer la théorie approximative de la poussée des terres, telle qu'elle est enseignée dans les écoles d'application, et qui d'ailleurs a reçu la sanction de l'expérience [\*\*\*].

---

[\*] *Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations*, *Mémorial de l'officier du Génie*, n° 13.

[\*\*] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2<sup>e</sup> série, t. IV.

[\*\*\*] *Nouvelles expériences sur la poussée des terres*; par le lieutenant-colonel du

On admet que : 1° lorsque les terres sont sur le point de glisser, la tendance au glissement a lieu suivant des plans parallèles aux arêtes du massif [\*]; 2° chaque plan de glissement ou de tendance à la rupture (*plan de rupture*) correspond à celui des prismes, ayant une arête commune dans le plan intérieur du mur, qui exerce sur ce mur le maximum de pression (*poussée*).

On considérait autrefois la composante tangentielle de la réaction de la masse de terre extérieure au prisme de rupture sur ce prisme comme se composant de deux termes, l'un représentant le frottement et l'autre, proportionnel à l'étendue de la surface de contact, la cohésion. Poncelet n'a pas tenu compte de ce dernier terme, et cela avec raison, puisque l'on fait le calcul de la poussée dans l'hypothèse où il y a tendance au glissement, c'est-à-dire en supposant que la cohésion est détruite. D'ailleurs, en opérant ainsi, on ne fait qu'améliorer les conditions de sécurité, puisqu'on ne peut qu'exagérer la valeur de la poussée et, par suite, l'épaisseur du mur.

Poncelet est le premier qui ait introduit dans la théorie de la poussée le frottement des terres sur le mur, dont le coefficient n'est que légèrement inférieur à celui des terres sur elles-mêmes.

#### DE LA POUSSÉE DES TERRES.

2. *Expression de la poussée.* — Nous considérerons une portion du massif et du mur limitée par deux plans menés perpendiculairement aux arêtes à un mètre de distance l'un de l'autre, de manière à être ramenés à la considération de la section déterminée par l'un de ces plans.

---

Génie Audé. Additions à ce Mémoire par le capitaine du Génie Domergue. (*Mémorial de l'officier du Génie*, n° 13.)

[\*] Par une analyse rigoureuse, M. Maurice Levy a démontré que cette hypothèse ne se réalise, dans le cas où la partie supérieure du massif est plane, qu'à la condition que l'inclinaison du parement est une fonction déterminée de la pente du talus et des angles de frottement de la terre sur elle-même et contre le mur. (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2<sup>e</sup> série, t. XV.)

Rankine commet deux erreurs en traitant le cas d'un simple talus. Il suppose d'a-

Soient (*fig. 1*)

$H$  le poids du mètre cube de terre ;

ABCDEF *G* le profil polygonal de la masse de terre ;

AB la trace du parement intérieur du mur ;

$\varepsilon$  l'inclinaison de cette trace sur la verticale ;

$\alpha, \alpha'$  les angles de frottement de la terre sur elle-même et de la terre sur le mur [<sup>\*</sup>].

Considérons un point déterminé A de la trace du parement intérieur du mur, et désignons par  $x$  sa distance AB au sommet B de ce parement.

Supposons, sauf vérification ultérieure, que le plan de rupture passant par le point A rencontre le côté EF.

bord, lorsque le massif est indéfini dans tous les sens, que la pression sur un plan parallèle au plan du talus lui est normale et est égale au poids du prisme vertical construit sur l'élément. La seconde partie de cet énoncé est inexacte ; car il résulte de la théorie de M. Maurice Levy qu'il faut substituer au prisme de Rankine le prisme normal à l'élément.

Le savant anglais admet en outre que, lorsque les terres s'appuient contre un mur, la distribution des pressions est la même que si le massif était indéfini, ce qui évidemment est inexact, puisque l'on a à remplir une condition qu'il faut exprimer.

[\*] On a

$x = 30^\circ$ , soit $\text{tang } x = 0,577$	pour le gros sable sec (Audé).
16	0,286 pour le sable extra-fin (Audé).
36	0,727 pour la terre humectée (Morin).
55	1,282 pour les terres fortes et les plus denses (Morin).
30	0,577 pour l'argile sèche (Lesbros).
22	0,404 pour l'argile humide et ramollie ( <i>id.</i> ).
26	0,488 pour la même argile recouverte de grosse grève ( <i>id.</i> ).

Puis :

$\alpha' = 27^\circ$ , $2'$ , soit $\text{tang } \alpha' = 0,51$	pour la pierre de libage sur un lit d'argile sèche.
18 . 47	0,34 } pour la pierre de libage sur un lit d'argile humide et ramollie.
21 . 49	0,40 } pour la pierre de libage sur un lit d'argile, cette argile étant recouverte de grosse grève.
26 . 34	0,500 pour le gros sable sur bois (Audé et Domergue).
15 . 25	0,257 pour le sable extra-fin (Audé et Domergue).
3 . 43	0,065 pour le mortier coulant (Audé et Domergue).

Dans les applications on prend ordinairement  $\alpha'$  égal à  $\alpha$ .

Soient

I et M les intersections de la direction de ce côté avec celles de AB et de la verticale AV du point A :

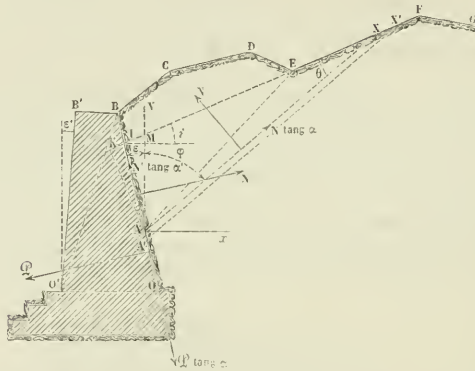
$r$  la distance AE ;

$\varphi$  l'angle que forme sa direction avec AV ;

$h = AK$  la perpendiculaire abaissée du point A sur EI :

B la base du triangle de hauteur  $h$  équivalent à l'aire ABCDE.

Fig. 1.



Pour chaque position du point A ou pour chaque valeur de  $z$ , les grandeurs  $r$ ,  $\varphi$ ,  $h$ , B seront complètement déterminées et pourront s'obtenir soit par le calcul, soit géométriquement.

Joignons un point quelconque X du côté EF au point A et appelons  $\theta$  l'angle formé par la droite AX avec ce côté.

La figure donne les relations suivantes :

$$\widehat{IMA} = 90^\circ - i, \quad \widehat{IEA} = 90^\circ - i - \varphi, \quad \widehat{EAX} = 90^\circ - i - \varphi - \theta,$$

$$(a) \quad EX = r \frac{\sin \widehat{EAX}}{\sin \theta} = r [\cos(i + \varphi) \cot \theta - \sin(i + \varphi)],$$

$$(b) \quad \widehat{VAX} = 90^\circ - i - \theta.$$



et l'on a

$$\text{aire ABCDEXA} = \frac{h}{2} (B + EX) = \frac{h}{2} [B - r \sin(i + \varphi) + r \cos(i + \varphi) \cot \theta];$$

par suite, pour le poids Q du prisme correspondant à cette aire,

$$(c) \quad Q = \frac{\pi h}{2} [B - r \sin(i + \varphi) + r \cos(i + \varphi) \cot \theta].$$

Ce poids faisant équilibre aux réactions normales N et N' des plans AB, AX et aux frottements correspondants N tang α, N' tang α', on a, en projetant successivement sur l'horizontale et la verticale.

$$N \cos \varepsilon - N' \tan \alpha' \sin \varepsilon - N \cos \widehat{VAX} + N \tan \alpha \sin \widehat{VAX} = 0,$$

$$N' \sin \varepsilon + N' \tan \alpha' \cos \varepsilon + N \sin \widehat{VAX} + N \tan \alpha \cos \widehat{VAX} = Q,$$

ou

$$(d) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{N}{\cos \alpha} = \frac{N'}{\cos \alpha'} \frac{\cos(\varepsilon + \alpha')}{\cos(\alpha + \widehat{VAX})}, \\ N' \frac{\sin(\varepsilon + \alpha')}{\cos \alpha'} + N \frac{\sin(\widehat{VAX} + \alpha)}{\cos \alpha} = Q. \end{array} \right.$$

En éliminant N entre les deux équations, on trouve

$$(e) \quad \frac{N'}{\cos \alpha'} = Q \frac{\cos(\alpha + \widehat{VAX})}{\sin(\varepsilon + \alpha + \alpha' + \widehat{VAX})} = Q \frac{\sin(\theta + i - \alpha)}{\cos(\theta + i - \alpha - \alpha' - \varepsilon)}.$$

Pour qu'il y ait une poussée, comme nous l'avons supposé, il faut que N' soit positif ou que l'on ait

$$(f) \quad \theta + i > \alpha;$$

$$(g) \quad \theta + i < 90^\circ + \varepsilon + \alpha + \alpha',$$

d'où

$$90^\circ + \varepsilon > -\alpha',$$

condition qui sera toujours satisfaite.

Mais l'angle  $\theta + i$  est celui que forme AX avec l'horizontale Ax du point A; il faut donc que l'inclinaison  $90^\circ + \varepsilon$  de AB sur Ax soit supérieure à  $\alpha$ . En se reportant à la formule (d), on voit que, pour que N soit positif, il faut que

$$(h) \quad \varepsilon < 90^\circ - \alpha',$$

condition que l'on supposera remplie.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\theta + i < \alpha, \quad \theta + i < 90^\circ + \varepsilon + \alpha + \alpha';$$

la première de ces conditions entraîne nécessairement l'autre; car de l'inégalité

$$\alpha < 90^\circ + \varepsilon + \alpha + \alpha'$$

on déduit

$$\varepsilon > -(90^\circ + \alpha'),$$

ce qui a toujours lieu. La réaction N' sera alors négative, c'est-à-dire que, pour établir l'équilibre strict, il faudrait exercer une traction sur AB; le mur deviendrait ainsi complètement inutile. Il suit de là que, pour qu'une terre se tienne d'elle-même en équilibre, il faut que l'inclinaison de sa surface sur l'horizon soit au plus égale à l'angle de frottement  $\alpha$  dont la tangente a reçu le nom de *pente naturelle des terres dépourvues de cohésion*. On voit, par suite, que l'angle  $i$  est au plus égal à  $\alpha$  et ne peut pas descendre au-dessous de  $-\alpha$ .

Revenons maintenant à la question de la poussée; les conditions

$$\varepsilon > -(90^\circ - \alpha + i), \quad \varepsilon < 90^\circ - \alpha'$$

sont toujours très-largement remplies dans les applications; car ou  $\varepsilon$  est très-petit en valeur absolue, lorsque, exceptionnellement, il est négatif, ou il est nul, ou, lorsqu'il est positif, sa valeur atteint au plus une quinzaine de degrés.

La condition (g), lorsqu'on y suppose  $\theta = 0$ , donne

$$\varepsilon + \alpha + \alpha' - \varepsilon' > -90^\circ,$$

ou encore

$$\cos(\varepsilon + \alpha + \alpha' - i) > 0,$$

ce qui a toujours lieu.

En remplaçant le poids  $Q$  par sa valeur ( $c$ ) dans la formule ( $e$ ), on trouve

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{N'}{\cos \alpha'} \frac{2 \cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)}{\Pi h \sin(\alpha - i)} \\ = [B - r \sin(i + \varphi) + r \cos(i + \varphi) \cot \theta] \frac{\cot(\alpha - i) - \cot \theta}{\cot \theta + \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)}. \end{array} \right.$$

Si nous posons maintenant

$$(2) \quad \cot \theta = x - \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i),$$

$$(3) \quad \lambda = \cot(\alpha - i) + \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i) = \frac{\cos(\alpha' + \varepsilon)}{\sin(\alpha - i) \cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)},$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} br \cos(i + \varphi) = r \sin(i + \varphi) + r \cos(i + \varphi) \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i) - B \\ = r \frac{\sin(\alpha + \alpha' + \varepsilon + \varphi)}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} - B, \end{array} \right.$$

la formule (1) devient

$$(5) \quad \frac{N'}{\cos \alpha'} \frac{2 \cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)}{\Pi h \sin(\alpha - i) \cos(i + \varphi)} = (x - b) \frac{\lambda - x}{x}.$$

Les dérivées première et seconde, par rapport à  $x$ , du second membre de cette dernière équation étant respectivement  $\frac{b\lambda}{x^2} - 1$  et  $-\frac{2b\lambda}{x^3}$ , on voit que le maximum de ce second membre correspond à la racine positive de l'équation obtenue en égalant à zéro la dérivée première, c'est-à-dire à

$$(d) \quad x = \sqrt{b\lambda}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (5) et désignant par  $N'_1$  le maximum  $N'$ , c'est-à-dire la composante normale de la poussée, on trouve

$$N'_1 = \frac{\Pi hr}{2} \frac{\cos \alpha' \sin(\alpha - i) \cos(i + \varphi)}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} (\sqrt{\lambda} - \sqrt{b})^2$$

ou, en remplaçant  $\lambda$  et  $b$  par leurs valeurs déduites des équations (3) et (4),

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} N'_i &= \frac{\pi h r}{2} \frac{\cos z' \sin z - i' \cos(i + \varphi)}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} \\ &\times \left[ \sqrt{\frac{\cos(z + \varepsilon)}{\sin(z - i) \cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)}} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \alpha' + \varepsilon + \varphi)}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i) \cos(i + \varphi)} - \frac{B}{r \cos(i + \varphi)}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Comme cette valeur doit être essentiellement positive,  $i$  ne peut pas être supérieur à l'angle  $z$  qui, comme nous l'avons dit plus haut, mesure la plus grande inclinaison que peut atteindre un talus, ou la pente naturelle des terres dénuées de cohésion.

Pour que l'expression (6) représente bien la poussée, il faut que la valeur de  $\theta$  correspondant à celle ( $d$ ) de  $x$ , donne pour EX une valeur au plus égale à celle du côté EF que nous désignerons par  $c$ , ce qui donne la condition suivante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &-r \sin(i + \varphi) + r \cos(i + \varphi) \\ &\times \left\{ \sqrt{\frac{\cos(z' + \varepsilon)}{\sin(z - i) \cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i) \cos(i + \varphi)}} \left[ \frac{\sin(\alpha + \alpha' + \varepsilon + \varphi)}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} - \frac{B}{r} \right] \right. \\ &\quad \left. - \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i) \right\} \leq c \end{aligned} \right.$$

Il faudrait aussi exprimer que EX doit être positif, mais il est inutile d'avoir égard à cette condition, en raison de la méthode que nous allons indiquer.

Portons sur BA, à partir du point B, les longueurs B.1, 1.2, 2.3, ... égales à une longueur donnée que l'on pourra prendre aussi petite que l'on voudra, et proposons-nous de calculer successivement les poussées exercées sur les portions B.1, B.2, B.3, ... du mur. On déterminera au moyen de la formule (7) la division à partir de laquelle on ne peut plus supposer que le plan de rupture coupe BC, soit par exemple la division n° 3; à partir de ce point, on supposera que le plan de rupture rencontre CD jusqu'à la division, soit par exemple le n° 7, pour laquelle la condition (7) n'est plus vérifiée, et ainsi de suite. Ces démarcations étant établies, on appliquera en conséquence

la formule (6) pour calculer les poussées normales sur les longueurs B. 1, B. 2, B. 3, ..., en attribuant respectivement à  $r$ ,  $h$ ,  $\varphi$ , B des valeurs convenables entre le point B et le point n° 3, entre ce dernier et le point n° 7, etc.

5. *Composantes horizontale et verticale et moment de la poussée.*

— Considérons maintenant  $z$  comme variable et prenons sur le parement intérieur, à partir du point B, une longueur déterminée  $BO = l$ .

Désignons par  $\mathcal{Q}$  la poussée normale sur OB. Si,  $n$  étant un nombre entier, on divise  $l$  en  $2n$  parties égales, on pourra calculer successivement les poussées sur B. 1, B. 2, ... et enfin  $\mathcal{Q}$ . Les composantes horizontale et verticale de la poussée totale  $\frac{\mathcal{Q}}{\cos z}$  auront respectivement pour valeurs

$$(8) \quad X = \mathcal{Q} \cos \varepsilon - \mathcal{Q} \operatorname{tang} \alpha' \sin \varepsilon = \frac{\mathcal{Q} \cos (z' + \varepsilon)}{\cos z'},$$

$$(9) \quad Y = \mathcal{Q} \sin \varepsilon + \mathcal{Q} \operatorname{tang} \alpha' \cos \varepsilon = \frac{\mathcal{Q} \sin (z' + \varepsilon)}{\cos z'}.$$

Proposons-nous maintenant de déterminer le moment, par rapport au point O, de la poussée sur OB. Soient (*fig. 1*) AX, A'X' les plans de rupture passant par les deux points consécutifs A, A' définis par  $BA = z$ ,  $BA' = z + dz$ ; la poussée normale sur BA' sera  $N_1 + \frac{dN_1}{dz} dz$  et l'accroissement du moment de la poussée sera, par suite,  $\frac{dN_1}{dz} (l - z)$ , d'où, pour le moment cherché,

$$\mathfrak{M} = \int_0^l (l - z) dN_1.$$

La fonction  $N_1$  sera généralement discontinue; mais dans tous les cas elle a la même valeur lorsque l'on passe d'un côté au suivant du profil BCDEF, de sorte que l'on peut effectuer l'intégration par parties entre les limites zéro et  $l$ , comme si  $N_1$  était continue, ce qui donne

$$\mathfrak{M}' = [N_1 (l - z)]_0^l + \int_0^l N_1 dz,$$

ou, comme  $N'_1$  est nul pour  $z = 0$ ,

$$(10) \quad \pi = \int_0^l N'_1 dz,$$

et, comme on connaît les valeurs de  $N'_1$  pour les valeurs B. 1, B. 2, B. 3, ..., une méthode de quadrature par approximation fera connaître  $\pi$ . Le bras de levier moyen  $p$  de la poussée est défini par la relation

$$(11) \quad p = \frac{\pi}{\bar{w}}.$$

Le point de OB qui se trouve à la distance  $p$  du point O est ce que l'on appelle le *centre de poussée*, parce que l'on peut supposer que la poussée totale lui est directement appliquée.

Nous ferons remarquer que l'on peut considérer la portion du mur correspondant à OB comme sollicitée par deux forces X, Y respectivement horizontale et verticale et par un couple dont le moment est  $\pi$ .

4. *Cas où la surface extérieure du massif est plane.* — On a, dans cette hypothèse,

$$B = 0, \quad \varphi = -\varepsilon, \quad h = z \cos(i - \varepsilon), \quad r = z,$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\cos(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} \sqrt{\frac{\cos(\alpha' + \varepsilon) \sin(\alpha + \alpha')}{\sin(\alpha - i) \cos i}} - \tan(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i).$$

L'angle  $\theta$  étant indépendant de  $z$ , tous les plans de rupture sont parallèles.

La formule (6) donne

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} N'_1 &= \frac{\pi z^2 \cos^2(i - \varepsilon) \cos \alpha' \sin(\alpha - i)}{2 \cos^2(\alpha + \alpha' + \varepsilon - i)} \\ &\times \left[ \sqrt{\frac{\cos(\alpha' + \varepsilon)}{\sin(\alpha - i)}} - \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \alpha')}{\cos(i - \varepsilon)}} \right]^2 [ * ], \end{aligned} \right.$$

---

[\*] Si l'on fait passer le facteur  $\sin(\alpha - i)$  sous les radicaux, que l'on suppose ensuite  $\alpha = 0$ ,  $\alpha' = 0$ ,  $i = 0$ , on retombe sur la formule relative à la poussée d'un

et la poussée est ainsi de la forme  $kz^2$ ,  $k$  étant une constante; la poussée correspondant à  $z = l$  est donc

$$\mathcal{Q} = kl^2,$$

et, d'après la formule (10), son moment par rapport au point O a pour valeur

$$\mathcal{M} = k \frac{l^3}{3},$$

d'où, pour le bras de levier de la poussée,

$$P = \frac{l}{3}.$$

Ce bras de levier est ainsi égal au  $\frac{1}{3}$  de la longueur de la portion considérée du parement intérieur, comme pour les liquides. En supposant nulles une, deux ou trois des quantités  $\alpha'$ ,  $i$ ,  $\varepsilon$ , on retombe sur des cas particuliers qui ont été l'objet d'études spéciales de plusieurs savants ingénieurs, notamment de Poncelet et d'Ardant [\*].

On remarquera que la poussée est nulle et que le mur devient inutile lorsque l'on a  $\varepsilon = -(90^\circ - i)$ , circonstance qui évidemment ne se présentera jamais.

§. Si l'on a  $i = 0$ ,  $\varepsilon = 0$ ,  $\alpha' = \alpha$ , la formule (6') donne

$$(6'') \quad \frac{2N_1'}{\Pi z^2} = \frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \left( \sqrt{\frac{1}{\tan \alpha}} - \frac{\sqrt{2 \tan \alpha}}{1 + \tan 2\alpha} \right),$$

ou, en posant  $\tan \alpha = u$ ,

$$\frac{2N_1'}{\Pi z^2} = \frac{\sqrt{u}}{1 - u^2} \left( 1 - \frac{u\sqrt{2}}{1 + u^2} \right).$$

liquide dont le poids spécifique serait  $\Pi$ , contre un mur incliné, sur la verticale de l'angle  $\varepsilon$ .

[\*] *Nouvelles recherches sur le profil du revêtement le plus économique*; par le lieutenant-colonel Ardant. (*Mémoires de l'officier du Génie*, n° 13.)

La valeur de  $u$  qui rend  $N'_1$  maximum est fournie par l'équation

$$u^5 - 2\sqrt{2}.u^4 + 5u^3 - \frac{5}{2}\sqrt{2}.u^2 + (4u - 2\sqrt{2} - 2) = 0,$$

et l'on reconnaît facilement que la racine de cette équation qui convient à la question est un peu supérieure à l'unité, chiffre qui est rarement atteint. On peut donc dire d'une manière générale que dans le cas actuel la poussée croît avec le coefficient de frottement.

6. *Cas où la surface supérieure du massif est plane et supporte une surcharge verticale uniforme.* — Représentons par  $\Pi\eta$  la valeur de la surcharge par unité de surface.

Au poids du prisme de poussée (*fig. 1*) il faudra ajouter

$$\Pi\eta \times IX = \Pi\eta z \frac{\cos(\varepsilon - i)}{\sin\theta},$$

c'est-à-dire que l'on devra remplacer  $\frac{\Pi z^2 \cos^2(\varepsilon - i)}{2 \sin\theta}$  par

$$\frac{\Pi z^2 \cos^2(\varepsilon - i)}{2 \sin\theta} \left[ 1 + \frac{2\eta}{z \cos(\varepsilon - i)} \right],$$

ce qui revient à multiplier la formule (6') par le facteur

$$1 + \frac{2\eta}{z \cos(\varepsilon - i)}.$$

7. *Examen du cas où le sommet du mur est recouvert en partie ou en totalité par le massif de terre.* — Ce cas se présente souvent dans les travaux de fortification permanente. Soient (*fig. 2*) CB la portion de la largeur du sommet du mur recouverte par la terre; J le point où la direction du parement intérieur du mur rencontre le talus,  $\gamma$  la longueur JB;  $n, n'$  les réactions normales des faces JB et CB sur le prisme CBJ. Conservons d'ailleurs les notations du n° 2, nous avons

$$CB = \gamma \frac{\cos(i - \varepsilon)}{\sin i},$$



et pour poids du prisme CJB

$$\frac{\Pi}{3} \mathcal{J}^2 \frac{\cos^2 (i - \varepsilon)}{\sin i}.$$

En projetant les forces qui sollicitent le prisme CJB respectivement sur

Fig. 2.



l'horizontale et la verticale, on trouve les relations suivantes :

$$n \cos \varepsilon - n \operatorname{tang} \alpha \sin \varepsilon - n' \operatorname{tang} \alpha' = 0,$$

$$n' - n \sin \varepsilon - n \operatorname{tang} \alpha \cos \varepsilon = \frac{\Pi \mathcal{J}^2 \cos^2 (i - \varepsilon)}{2 \sin i},$$

ou

$$n' = n \cot \alpha \frac{\cos (z + \varepsilon)}{\cos z}, \quad n' - n \frac{\sin (z + \varepsilon)}{\cos z} = \frac{\Pi}{2} \mathcal{J}^2 \frac{\cos^2 (i - \varepsilon)}{\sin i}.$$

d'où, par l'élimination de  $n'$ ,

$$n = \frac{\Pi}{2} \mathcal{J}^2 \frac{\cos^2 (i - \varepsilon) \sin z' \cos z}{\sin i \sin (\varepsilon + z + z')}.$$

On démontrerait, comme au n<sup>o</sup> 4, que la résultante  $\tau$  de  $n$  et  $n \operatorname{tang} \alpha$  peut être considérée comme appliquée au tiers de BJ à partir du point B. Pour obtenir la poussée sur BO, on pourra supposer que le mur se prolonge jusqu'en J; de la poussée obtenue on retranchera géométriquement  $\tau$ , et de son moment celui de cette dernière force.

Mais, en général, on ne tient pas compte de la force  $\tau$ , parce qu'elle est relativement faible, et qu'en la négligeant on ne fait qu'améliorer les conditions de stabilité du mur, dont nous parlerons plus loin.

DE LA BUTÉE DES TERRES.

8. Poncelet a donné le nom de *butée* à la résistance qu'oppose un massif à un mur qui, sous l'action d'un effort extérieur, tendrait à faire remonter les terres. Cette résistance doit être considérée comme étant le minimum de celles qu'opposent les prismes au glissement de bas en haut.

L'équivalent de la formule (1), relatif à la butée des terres, s'obtiendra évidemment en y changeant les signes de  $\alpha$  et  $\alpha'$ , puisque la seule différence consiste en ce que les frottements changent de sens. On a ainsi

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \frac{N'}{\cos \alpha'} &= \frac{2 \cos (\alpha + \alpha' + i - \varepsilon)}{H \sin (\alpha + i)} \\ &\times [B - r \sin (i + \varphi) + r \cos (i + \varphi) \cot \theta] \frac{\cot \theta + \cot (\alpha + i)}{\cot \theta - \tan (\alpha + \alpha' + i - \varepsilon)}. \end{aligned} \right.$$

Si nous posons

$$\begin{aligned} x &= \cot \theta - \tan (\alpha + \alpha' + i - \varepsilon), \\ \lambda' &= \cot (\alpha + i) + \tan (\alpha + \alpha' + i - \varepsilon) = \frac{\cos (\alpha' - \varepsilon)}{\sin (\alpha + i) \cos (\alpha + \alpha' + i - \varepsilon)}, \\ r \cos (i + \varphi) b' &= B - r \sin (i + \varphi) + r \cos (i + \varphi) \tan (\alpha + \alpha' + i - \varepsilon) \\ &= B - r \frac{\sin (\alpha + \alpha' - \varepsilon - \varphi)}{\cos (i + \varphi) \cos (\alpha + \alpha' + i - \varepsilon)}, \end{aligned}$$

l'équation (12) devient

$$\frac{N'}{\cos \alpha'} \frac{2 \cos (\alpha + \alpha' + i - \varepsilon)}{H r \sin (\alpha + i) \cos (i + \varphi)} = (x + b') \frac{x + \lambda}{x}.$$

Si l'on cherche la valeur de  $x$  qui rend minimum le second membre

de cette équation, on trouve

$$x = \sqrt{\lambda' b'}.$$

Si  $N'_2$  est la valeur correspondante de  $N'$ , ou l'intensité de la composante normale de la butée, on a

$$N'_2 = \frac{\pi h r}{2} \frac{\cos \alpha' \sin(x+i) \cos(i+\varphi)}{\cos(x+\alpha'+i-\varepsilon)} (\sqrt{\lambda'} + \sqrt{b'}),$$

ou

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} N'_2 &= \frac{\pi h r}{2} \frac{\cos \alpha' \sin(x+i) \cos(i+\varphi)}{\cos(x+\alpha'+i-\varepsilon)} \\ &\times \left[ \sqrt{\frac{\cos(\alpha'-\varepsilon)}{\sin(x+i) \cos(x+\alpha'+i-\varepsilon)}} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{B}{r \cos(i-\varphi)} + \frac{\sin(x+\alpha'-\varepsilon-\varphi)}{\cos(i+\varphi) \cos(x+\alpha'+i-\varepsilon)}} \right]^2. \end{aligned} \right.$$

Dans le cas d'un simple talus, qui correspond au n° 4 pour la poussée, on a

$$(13') \quad N'_2 = \frac{\pi z^2 \cos \alpha' \cos^2(i-\varepsilon) \sin(x+i)}{\cos^2(x+\alpha'+i-\varepsilon)} \left[ \sqrt{\frac{\cos(\alpha'-\varepsilon)}{\sin(x+i)}} + \sqrt{\frac{\sin(x+\alpha')}{\cos(i-\varepsilon)}} \right]^2.$$

En se reportant au numéro précité, on reconnaît sans peine que, toutes choses égales d'ailleurs, la butée sera généralement supérieure à la poussée.

Tout ce que nous avons dit sur la poussée, relativement aux composantes horizontale et verticale et au moment, étant applicable à la butée, nous n'avons pas à insister davantage sur ce sujet.

#### DE LA STABILITÉ D'UN MUR DE SOUTÈNEMENT.

9. Lorsque l'on veut calculer l'épaisseur d'un mur devant résister à une poussée déterminée, on fait abstraction de la cohésion de la maçonnerie, en vue d'obtenir une plus grande sécurité et de parer à toutes les éventualités : on considère alors le mur comme composé de tranches horizontales infiniment minces, exerçant l'une sur

l'autre, au moment où il y a une tendance au glissement, un frottement dont le coefficient a été déterminé par des expériences préalables et dû à la composante verticale des efforts qui s'exercent sur la portion supérieure du mur qui tend à se déplacer.

Cette constitution hypothétique du mur permet également de supposer qu'une partie supérieure de ce mur tend à se déplacer par rotation autour du côté de sa base situé dans le plan du parement extérieur.

Nous avons donc deux modes de rupture à étudier : 1° par glissement suivant une assise; 2° par rotation autour d'une horizontale comprise dans le plan du parement extérieur.

Soient (*fig. 1*)

$O'B'$  le parement extérieur ;

$\varepsilon'$  son inclinaison sur la verticale ;

$e_0, e$  les épaisseurs  $BB', OO'$  du mur au sommet et au point  $O$  ;

$f''$  le coefficient de frottement de la maçonnerie sur elle-même [\*] ;

$H$  la hauteur de  $BB'$  au-dessus de  $OO'$  ;

$\Pi'$  le poids du mètre cube de maçonnerie.

Conservons d'ailleurs les notations des numéros précédents; nous avons les relations

$$(14) \quad H = l \cos \varepsilon, \quad e = e_0 + H (\tan \varepsilon + \tan \varepsilon').$$

[\*] L'expérience a donné pour  $f''$  les chiffres suivants :

Calcaire boucharde sur lui-même.....	0,78
Muschelkalk bien dressé sur calcaire oolithique tendre.....	0,75
Calcaire oolithique tendre sur lui-même, sans ou avec interposition de mortier en sable fin.....	0,74
Grès sur grès uni.....	0,71
Calcaire dur bien dressé sur lui-même.....	0,70
Brique sur calcaire tendre ou dur.....	0,67
Grès uni sur grès uni, avec interposition de mortier frais, granite bien dressé sur granite.....	0,66
Calcaire dur poli sur calcaire dur poli.....	0,58
Granite bien dressé sur granite bien dressé avec interposition de mortier frais.....	0,49

10. *Tendance à la rupture par glissement.* — S'il y avait tendance au glissement suivant  $OO'$ , le poids du mur et la composante verticale de la poussée donneraient lieu au frottement

$$f'' \left[ \frac{\pi'}{2} \frac{e'' + e_0}{2} H + Y \right] = f'' \left\{ \Pi' \left[ e_0 + \frac{H}{2} (\text{tang } \varepsilon + \text{tang } \varepsilon') + \varrho \frac{\sin |z' + \varepsilon|}{\cos z'} \right] \right\}.$$

Pour que cette tendance n'ait pas lieu, il faut que ce frottement soit supérieur à la composante horizontale de la poussée, ou que l'on ait

$$f'' \left\{ \Pi' \left[ e_0 + \frac{H}{2} (\text{tang } \varepsilon + \text{tang } \varepsilon') + \varrho \frac{\sin |z' + \varepsilon|}{\cos z'} \right] \right\} > \varrho \frac{\cos |z' + \varepsilon|}{\cos z'}$$

condition qui sera satisfaite, puisque  $\varepsilon$  n'est jamais négatif, si la suivante est vérifiée :

$$e_0 + \frac{H}{2} (\text{tang } \varepsilon + \text{tang } \varepsilon') > \frac{P}{\Pi' f''}.$$

Le maximum du second membre de cette inégalité correspondra généralement au pied du mur, de sorte que nous supposons dorénavant que  $H$  est la hauteur du mur au-dessus de sa fondation, et  $\varrho$  la poussée normale sur toute l'étendue du parement intérieur.

Nous pourrions donc poser

$$(15) \quad e_0 + \frac{H}{2} (\text{tang } \varepsilon + \text{tang } \varepsilon') = \mu \frac{P}{\Pi' f''},$$

$\mu$  étant un nombre supérieur à l'unité, appelé *coefficient de stabilité relatif au glissement*, et que l'on devra prendre d'autant plus grand que l'on devra obtenir de meilleures conditions de sécurité.

En prenant pour types des murs qui ont résisté à toutes les causes de dislocation pendant un grand nombre d'années, on déduira pour  $\mu$  un certain nombre de valeurs dont le maximum devra être considéré comme suffisant. C'est ainsi que Poncelet a été conduit à proposer le chiffre

$$\mu = 1,912,$$

pour obtenir une sécurité convenable.

Ce chiffre étant admis, la formule (15) fera connaître l'épaisseur

que l'on doit donner au sommet, par suite à la base, à un mur qui doit se trouver dans des conditions déterminées.

**11. Tendance à la rupture par rotation.** — Si l'on décompose (fig. 1) le trapèze OBB'O' en deux triangles, en menant la diagonale O'B, on trouve facilement que le moment de l'aire de ce trapèze par rapport au point O' a pour valeur

$$\frac{H}{6} [e_0(2H \operatorname{tang} \varepsilon' + e_0) + e(e - H \operatorname{tang} \varepsilon)];$$

pour qu'il n'y ait pas tendance à la rotation autour de l'horizontale projetée en O', il faut que

$$\frac{\pi'}{6} [e_0(2H \operatorname{tang} \varepsilon' + e_0) + e(e - H \operatorname{tang} \varepsilon)] + \frac{Qe \sin(\alpha' + \varepsilon)}{\cos \alpha'} < \partial \mathcal{N},$$

inégalité qui sera *a fortiori* satisfaite si la suivante est vérifiée :

$$e_0(2H \operatorname{tang} \varepsilon' + e_0) + e(e - H \operatorname{tang} \varepsilon) < \frac{6\partial \mathcal{N}}{\pi'}.$$

On pourra donc poser

$$e_0(2H \operatorname{tang} \varepsilon' + e_0) + e(e - H \operatorname{tang} \varepsilon) = \frac{6\mu' \partial \mathcal{N}}{\pi'},$$

$\mu'$  étant un coefficient supérieur à l'unité, appelé *coefficient de stabilité* relatif à la *rotation* et que l'on déterminera de la même manière que celui qui est relatif au glissement.

D'après Poncelet, on peut prendre

$$\mu' = 1,86.$$

Si l'on remplace dans la formule précédente  $e$  par sa valeur (14), on a, pour déterminer  $e_0$ , l'équation

$$(16) \quad e_0^2 + H(2 \operatorname{tang} \varepsilon' + \frac{1}{2} \operatorname{tang} \varepsilon) e_0 + \frac{H^2}{2} (\operatorname{tang} \varepsilon' - \operatorname{tang} \varepsilon) \operatorname{tang} \varepsilon' = 3\mu' \frac{\partial \mathcal{N}}{\pi'} [ * ],$$

d'où l'on déduira  $e_0$ .

[ \* ] Généralement, l'angle  $\varepsilon'$  est assez petit pour que l'on puisse négliger le carré de

Il est clair que, pour que la double condition de stabilité par glissement et par rotation soit remplie, il faut prendre la plus grande des valeurs de  $e_0$  données par les équations (15) et (16).

**12. Des contre-forts.** — On désigne sous ce nom des murs secondaires placés dans un massif de terre que doit soutenir un mur de soutènement auquel ils sont reliés. Ils sont généralement identiques, également espacés, et leurs faces latérales sont normales aux parements du mur principal. Ils ont pour effet d'assurer la stabilité de ce mur lorsque, par suite d'exigences particulières, on ne peut pas lui donner l'épaisseur calculée d'après la méthode exposée plus haut. Soient

$\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}_1$  les poussées par mètre courant sur le mur de soutènement et un contre-fort, supposés tous deux indéfinis, et que nous savons calculer ;

$\nu$ ,  $\nu_1$  leurs bras de levier par rapport au côté extérieur de la base du mur ;

$Q$ ,  $Q_1$  les poids par unité de longueur horizontale du mur et d'un contre-fort ;

$q$ ,  $q_1$  leurs bras de levier par rapport au côté ci-dessus de la base du mur ;

$X$ ,  $X_1$  les composantes horizontales de  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}_1$  ;

$L$ ,  $L_1$  la distance des plans moyens de deux contre-forts consécutifs et la largeur de ces contre-forts.

Considérons la portion du mur de soutènement déterminée par deux plans perpendiculaires à ses arêtes, menés aux milieux des intervalles qui séparent un contre-fort de celui qui le précède et de celui qui le suit. Nous aurons pour les conditions de stabilité, en conservant à

sa tangente. Dans le profil de Vauban ( $H = 10^m$ ) on avait  $\text{tang } e' = \frac{1}{5}$  ; mais, par suite de la faible pente du parement extérieur, les eaux pluviales ne se dégagèrent pas suffisamment des joints et provoquèrent la fécondation des semences végétales apportées par le vent et les courants d'air. Il résultait de là des végétations qui avaient pour effet de disloquer les éléments du parement. Pour obvier à cet inconvénient, il convient de prendre  $\text{tang } e'$  inférieur à  $\frac{1}{7}$ . On admet généralement  $\frac{1}{5}$ .

$f''$ ,  $\mu$ ,  $\mu'$  les mêmes significations que ci-dessus,

$$X(L - L_1) + X_1 L_1 = \mu f''(QL + QL_1),$$

$$\varpi(L - L_1)v + \varpi_1 L_1 v_1 = \mu'(QqL + Q_1 L_1 q_1).$$

Les quantités  $v$ ,  $v_1$ ,  $Q$ ,  $Q_1$ ,  $q$ ,  $q_1$  s'exprimeront facilement en fonction des épaisseurs à la base ou au sommet du mur et des contre-forts; on aura ainsi deux équations à deux inconnues que l'on pourra déterminer, et qui devront être considérées comme des minima.

Si les parements intérieurs du mur et des contre-forts sont parallèles, on a évidemment

$$P = P_1, \quad X = X_1.$$

#### DES FONDATIONS.

15. Dans ce qui précède, nous n'avons admis une tendance à la destruction d'un mur par glissement et par rotation que dans le mur lui-même et spécialement à sa base; nous avons admis ainsi implicitement que cette base était reliée à un massif de maçonnerie ou *fondation* engagée dans le terrain, et dont l'épaisseur à la base est supérieure à celle du mur.

Le profil d'une fondation est naturellement limité par deux bases horizontales (*fig. 1*); chacun de ses côtés latéraux est vertical ou présente des gradins.

Dans ce dernier cas, on calcule, par approximation, la poussée et la butée des terres, en remplaçant le profil des gradins par une droite moyenne.

Les fondations ont pour objet :

1° De répartir le poids total de la maçonnerie sur une plus grande étendue de terrain, de manière à réduire la pression par mètre carré de surface et par suite le tassement;

2° D'augmenter le poids total et de lui donner un plus grand bras de levier sans augmenter sensiblement la poussée et son bras de levier.

On satisfera à ces conditions en donnant à la fondation un grand



empatement sur le devant, et par suite une faible hauteur relative. Les effets de l'augmentation de la poussée et de son moment, due à l'existence de la fondation, seront en partie compensés par ceux de la butée et de son moment.

Les conditions de stabilité de l'ensemble de la maçonnerie, relatives au glissement sur le terrain et à la rotation autour du côté extérieur de la base de la fondation, s'établiront dans chaque cas en suivant la méthode indiquée aux n<sup>os</sup> 10 et 11, en faisant toutefois intervenir la butée.

14. *Contre-forts extérieurs ou éperons butants.* — Lorsque le frottement de la maçonnerie sur le terrain est très-faible, comme cela a lieu, par exemple, quand le terrain est argilo-vaseux, on ne pourrait éviter de glissement qu'en donnant à la fondation un empatement déterminé.

On évite cet inconvénient, quand les circonstances le permettent, en reliant de distance en distance (par des châssis en charpente, ou mieux encore, au point de vue de la durée, par des voûtes renversées), la fondation du mur à celle d'un second mur qui lui fait face, d'une hauteur moins élevée, accolé lui-même contre un massif de terre.

En donnant au second mur une hauteur suffisante, on pourra, par la butée qu'il développera, neutraliser, autant qu'on le voudra, les effets de la poussée sur le mur principal et assurer la stabilité de ce dernier.

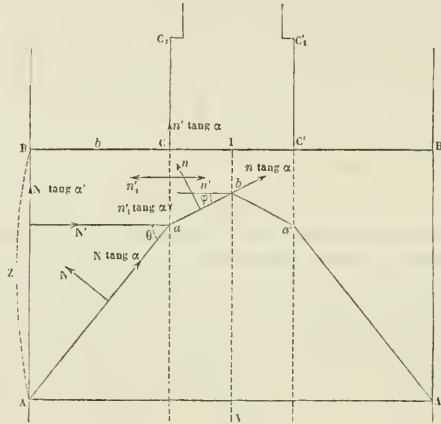
La place de Bergues offre un exemple de l'emploi des éperons butants en charpente, dont l'idée première paraît due à Vauban.

15. *Fondations sur sable rapporté.* — Lorsque la nature d'un terrain est telle qu'il puisse, sous l'action d'une forte charge, éprouver un tassement notable, tassement qui serait toujours accompagné d'un refoulement latéral de la matière, il est dangereux d'établir directement, sur un pareil terrain, la fondation d'une construction. On évite ce danger en employant différents procédés dont il serait inopportun de faire ici la nomenclature. Cependant, parmi ces procédés, il en est un qui a été l'objet d'études spéciales, de la part des membres les plus distingués du corps des ingénieurs militaires, et qui constitue ce que

l'on appelle le système de *fondations sur sable rapporté*, et auquel nous croyons devoir nous arrêter [\*].

Voici en quoi il consiste : on fait dans le terrain une tranchée dont on soutient les terres, si cela est nécessaire, par des palplanches légères; on remplit l'excavation par du sable de rivière, qui, comme on le sait, est peu compressible, et c'est sur la masse aréuacée que l'on établit la fondation.

Fig. 3.



Il est facile de se rendre compte de l'effet produit : la pression totale sur le fond de la fouille est égale au poids du sable et de la maçonnerie, diminué du frottement dû à la poussée normale contre les parois latérales. Or, comme cette poussée et par suite le frottement auquel elle donne lieu croissent bien plus rapidement avec la profondeur que le poids du sable, on voit qu'en donnant à la tranchée une hauteur con-

[\*] *Notice sur une nouvelle manière de fonder en mauvais terrain*; par le capitaine du Génie Moreau (*Mémorial de l'officier du Génie*, n° 11). — *Mémoire sur l'emploi du sable dans les fondations en mauvais terrain*; par le capitaine du Génie Niel (même recueil, n° 12). — *Mémoire sur la stabilité des revêtements et de leurs fondations*; par Poncelet (même recueil, n° 13).

venable, on peut réduire la pression par mètre carré sur le fond, dans telle proportion que l'on voudra, et par suite rendre insensible le tassement du terrain. La poussée est d'ailleurs neutralisée par la butée de la terre contre le sable rapporté.

Supposons (*fig. 3*) que la charge sur le sable soit produite par le poids d'un prisme vertical assez long pour qu'on puisse le considérer comme indéfini, dont les faces  $CC_1$ ,  $C'C'_1$ , parallèles à celles  $AB$ ,  $A'B'$  de la tranchée, soient respectivement situées à une même distance  $b = EC = B'C'$  de ces dernières. Nous serons, comme plus haut, ramené à considérer une section faite par un plan perpendiculaire aux longs côtés de la tranchée.

Soient

$2e$  la largeur  $CC'$  de la base du prisme;

$I$  son point milieu et  $IV$  la verticale de ce point;

$z = AB = A'B'$  la hauteur du prisme de sable;

$\eta$  la hauteur du prisme  $CC_1$ ,  $C'C'_1$  multipliée par le rapport de son poids spécifique à celui  $\Pi$  du sable.

La charge par unité de surface sera représentée par  $\Pi\eta$ .

Admettons que la hauteur  $z$  soit assez grande, sans justification ultérieure, pour que le prisme de poussée sur  $AB$  rencontre la direction du côté  $CC_1$  en un point  $a$  situé au-dessous de  $C$ , et que le prisme de poussée sur  $Ca$  rencontre  $IV$  en un point  $b$  situé en contre-bas de  $I$ . Les points  $a'$ ,  $b'$  sont les symétriques de  $a$ ,  $b$  par rapport à  $IV$ . Nous pourrions, sans grande erreur et pour simplifier, supposer que l'angle du frottement contre les parois  $AB$ ,  $A'B'$  est égal à celui qui est relatif au sable sur lui-même.

Nous désignerons par  $n$ ,  $n'$  les réactions normales de  $ab$ ,  $aC$  sur le prisme arénacé  $aC Ib$ , et par  $\varphi$  l'inclinaison de  $ab$  sur l'horizon. Si nous admettons qu'il y ait tendance au glissement de la droite vers la gauche du prisme ci-dessus, il y aura une tendance semblable de la gauche vers la droite de la part de la masse  $a'C' Ib'$ .

Nous devons donc supposer que les deux masses tendent à se séparer suivant leur face commune  $Ib$  et que, par suite, elles n'exercent aucune action l'une sur l'autre.

En désignant par  $x$  la longueur  $aCb$ , ou a

$$Ib = x - e \operatorname{tang} \varphi, \quad \text{aire } aCib = e \left( x - \frac{e}{2} \operatorname{tang} \varphi \right),$$

et

$$\Pi e \left( \eta + x - \frac{e}{2} \operatorname{tang} \varphi \right),$$

pour le poids du prisme  $aCib$  augmenté de la charge sur  $CI$ .

Les conditions d'équilibre de translation du même prisme sont

$$\begin{aligned} n (\cos \varphi + \operatorname{tang} \alpha \sin \varphi) + n' \operatorname{tang} \alpha &= \Pi e \left( \eta + x - \frac{e}{2} \operatorname{tang} \varphi \right), \\ n (\sin \varphi - \operatorname{tang} \alpha \cos \varphi) - n' &= 0; \end{aligned}$$

d'où, par l'élimination de  $n$ ,

$$(h) \quad \frac{n'}{\Pi e} = \frac{\left( \eta + x - \frac{e}{2} \operatorname{tang} \varphi \right) (\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \alpha)}{1 + 2 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang}^2 \alpha}$$

Posant

$$1 + 2 \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang}^2 \alpha = u,$$

d'où

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{u - 1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}{2 \operatorname{tang} \alpha} = \frac{u}{2} \cot \alpha - \cot 2 \alpha,$$

$$\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \alpha = \frac{u - 1 - \operatorname{tang}^2 \alpha}{2 \operatorname{tang} \alpha},$$

la formule (h) devient

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{4n' \operatorname{tang}^2 \alpha}{\Pi e} &= \left[ 2(\eta + x) \operatorname{tang} \alpha - \frac{e}{2}(u - 1 + \operatorname{tang}^2 \alpha) \right] \frac{(u - 1 - \operatorname{tang}^2 \alpha)}{u} \\ &= \frac{-\frac{e}{2} u^2 + 2u \left[ (\eta + x) \operatorname{tang} \alpha + \frac{e}{2} \right] - 2(\eta + x) (1 + \operatorname{tang}^2 \alpha) \operatorname{tang} \alpha - \frac{e}{2} (1 - \operatorname{tang}^2 \alpha)}{u} \quad [*]. \end{aligned} \right.$$

[\*] Cette expression est de la forme

$$\frac{-au^2 + 2bu - e}{u} = -au + 2b - \frac{e}{u}.$$

Ses dérivées première et seconde sont respectivement  $-a + \frac{e}{u^2}$ ,  $-\frac{2e}{u^3}$ . Son maxi-

Le maximum de cette fonction de  $u$  correspond à

$$(18) \quad u = \sqrt{\frac{4(\eta + x)(1 + \tan^2 z) \tan z + e(1 - \tan^4 z)}{e}},$$

et l'on a par suite, pour la poussée  $n'_1$  sur  $aC$ ,

$$n'_1 = \frac{\Pi e \cot z}{2} \left\{ \left[ \eta + x + \frac{e}{2 \tan z} - \sqrt{\frac{e}{2 \tan z} \left[ 2(\eta + x)(1 + \tan^2 z) + \frac{e}{2 \tan z} (1 - \tan^4 z) \right]} \right] \right\},$$

expression que l'on peut, sans grande erreur, réduire à la suivante :

$$n'_1 = \frac{\Pi e \cot z}{2} \left[ \eta + x + \frac{e}{2 \tan z} - \sqrt{\frac{e}{\tan z} (\eta + x)} \right],$$

attendu que  $\sqrt{\frac{e \tan z}{\eta + x}}$ ,  $\frac{e}{4 \tan z}$ ,  $\frac{1 - \tan^4 z}{x + x}$  sont en général de petites fractions.

Soit maintenant  $\vartheta$  l'inclinaison inconnue de  $Aa$  sur l'horizon ; on a

$$x = z - b \tan \vartheta,$$

par suite,

$$n'_1 = \frac{\Pi e}{2} \cot z \left[ \eta + z + \frac{e \cot z}{2} - b \tan \vartheta - \sqrt{e(\eta + z - b \tan \vartheta) \cot z} \right],$$

ou approximativement

$$(19) \quad n'_1 = \frac{\Pi e}{2} \cot z \left[ \eta + z + \frac{e \cot z}{2} - b \tan \vartheta - \sqrt{e(\eta + z) \cot z} \right],$$

en raison de ce que  $\frac{b \tan \vartheta}{2(\eta + z)}$  est en général une faible fraction.

mum correspond à

$$u = \sqrt{\frac{c}{a}},$$

et a pour valeur

$$2(b - \sqrt{ca}).$$

Soient, maintenant,  $N$ ,  $N'$  les réactions normales des plans  $Aa$ ,  $AB$  sur le prisme de sable  $ABCa$ ; ce prisme étant en équilibre, sous l'action de ces forces, des frottements auxquels elles donnent lieu et de son poids, on a

$$\frac{N \cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} + N' \tan \alpha - n'_1 \tan \alpha = \Pi b \left( z - \frac{b \tan \theta}{2} \right),$$

$$\frac{N \sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} - N' + n'_1 = 0;$$

d'où, par l'élimination de  $N$ ,

$$N' = n'_1 + \frac{\Pi b \left( z - \frac{b}{2} \tan \theta \right) (\tan \theta - \tan \alpha)}{1 + 2 \tan \alpha \tan \theta - \tan^2 \alpha}.$$

Si nous posons

$$1 + 2 \tan \alpha \tan \theta - \tan^2 \alpha = u,$$

le second terme de cette expression ne sera autre chose que la valeur que prendrait  $n'_1$  si l'on remplaçait dans la formule (17)  $e$  par  $b$  et  $\eta + z$  par  $z$ ; de sorte que, en ayant égard à la formule (19), on a, en négligeant la quatrième puissance de  $\tan \alpha$ ,

$$\frac{4N' \tan^2 \alpha}{\Pi b} = \frac{2e}{b} \left[ \eta + z + \frac{e}{2} \cot \alpha + b \cot 2\alpha - \sqrt{e(\eta + z) \cot \alpha} \right] \tan \alpha$$

$$+ 2 \left( z \tan \alpha + \frac{b}{2} \right) - \left( e + \frac{b}{2} \right) u - \frac{2z(1 + \tan^2 \alpha) \tan \alpha + \frac{b}{2}}{u},$$

expression dont le maximum correspond à

$$(20) \quad u = \sqrt{\frac{2z(1 + \tan^2 \alpha) \tan \alpha + \frac{b}{2}}{e + \frac{b}{2}}}$$

et la poussée normale  $N'_1$  sur  $AB$  sera donnée par la formule

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2N'_1}{\Pi} \tan \alpha = e\eta + z(e + b) + \frac{b}{2} \cot \alpha [b + e(1 - \tan^2 \alpha)] \\ \quad - e \sqrt{e(\eta + z) \cot \alpha} \\ \quad - b \sqrt{\left( e + \frac{b}{2} \right) \cot \alpha \left[ 2z(1 + \tan^2 \alpha) + \frac{b}{2} \cot \alpha \right]}, \end{array} \right.$$

et l'on aura pour le rapport  $\delta$  de la résultante du frottement sur les deux parois au poids total

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta &= \frac{1}{2} + \frac{b}{4} \cot \alpha \frac{[b + c(1 - \tan^2 \alpha)]}{e\gamma + z(e + b)} \\ &= \frac{e\sqrt{e(\gamma + z)} \cot \alpha + b \sqrt{\left(e + \frac{b}{2}\right) \cot \alpha \left[z(1 + \tan^2 \alpha) + \frac{b}{4} \cot^2 \alpha\right]}}{2[e\gamma + z(e + b)]}, \end{aligned} \right.$$

et ce rapport serait égal à  $\frac{1}{2}$  si  $z$  était infini.

On reconnaît ainsi qu'en substituant à la terre du sable, qui a à peu près le même poids spécifique, on peut réduire considérablement la pression sur le fond de la tranchée, en donnant une hauteur convenable à cette dernière.

Si  $b$  est très-petit, comme cela a lieu le plus souvent, la formule (22) se réduit approximativement à la suivante :

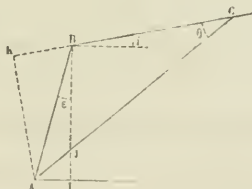
$$\delta = \frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{\frac{e \cot \alpha}{\gamma + z}} \right),$$

qui est d'une facile application.

#### DE L'ÉQUILIBRE DES TERRES LORSQU'ELLE LA RUPTURE PAR GLISSEMENT NE TEND PAS À SE PRODUIRE.

16. Proposons-nous (*fig. 4*) de déterminer le minimum de l'inclinaison  $\varepsilon$  sur la verticale que l'on doit donner à un talus AB pratiqué

Fig. 4.



dans un terrain BC incliné de l'angle  $i$  sur l'horizon, pour que la terre ne tende pas à se désagrèger.

Soient

AK, BI les perpendiculaires abaissées respectivement du point A sur la direction de BC et du point B sur l'horizontale de A;

C un point quelconque du profil du terrain;

$\vartheta$  l'angle ACB;

H la hauteur BI;

$\gamma$  la cohésion de la terre par unité de surface [\*];

J l'intersection de AC et de BI.

La figure donne

$$AB = \frac{H}{\cos \varepsilon}, \quad BC = AB \frac{\widehat{\sin BAC}}{\sin \vartheta} = AB \frac{\sin(i + \varepsilon + \theta)}{\sin \vartheta},$$

$$AC = AB \frac{\cos(i + \varepsilon)}{\sin \vartheta}, \quad \widehat{BCJ} = 90^\circ - i - \theta.$$

Si l'on exprime que la composante suivant AC du poids du prisme BAC est inférieure à la cohésion  $\gamma AC$ , on a

$$\frac{\pi H}{2} \frac{AB \cos(i + \varepsilon + \theta) (\cos i - \sin i \operatorname{tang} \varepsilon) \sin(i + \theta)}{\sin \vartheta} < \frac{AB \cos(i + \varepsilon) \gamma}{\sin \vartheta};$$

d'où

$$\operatorname{tang} \varepsilon > \frac{\frac{\pi H}{2\gamma} (\cot \theta - \operatorname{tang} 1) (1 + \cot \theta \operatorname{tang} i) - (1 + \cot^2 \theta)}{\frac{\pi H}{2\gamma} (1 + \cot \theta \operatorname{tang} i)^2}.$$

Il faut donc que  $\varepsilon$  soit au plus égal au maximum par rapport à  $\cot \theta$  du second membre de cette inégalité. Mais nous nous bornerons ici à considérer le cas de  $i = 0$ . Nous aurons alors

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \max. \left[ \cot \theta - \frac{2\gamma}{\pi H} (1 + \cot^2 \theta) \right]$$

[\*] On a, d'après Navier,

$$\gamma = 136^{\text{ks}} \text{ pour les terres franches,}$$

$$\gamma = 568^{\text{ks}} \text{ pour les terres très-fortes.}$$



Où

$$\tan \varepsilon = \frac{\pi H}{8\gamma} - \frac{2\gamma}{H}.$$

Le talus sera vertical pour la hauteur  $H_1$ , donnée par la formule

$$H_1 = \frac{4\gamma}{\pi}.$$

Si  $H$  croît indéfiniment,  $\varepsilon$  tendra vers  $90^\circ$ ; mais, à partir du moment où  $\varepsilon$  atteindra  $90^\circ - \alpha$ , les terres tiendront quand même en raison du frottement; la valeur  $H_2$  de  $H$  correspondant à cette limite est donnée par la formule

$$H_2 = \frac{4\gamma}{\pi} \left( \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right) = H_1 \left( \cot \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

Pour les terres très-fortes, on a

$$\gamma = 568^{\text{kg}}, \quad \pi = 1800^{\text{kg}}, \quad \alpha = 55^\circ$$

et

$$H_1 = 1^{\text{m}}, 26, \quad H_2 = 2^{\text{m}}, 38.$$

NOTE SUR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉQUILIBRE  
DES SEMI-FLUIDES.

17. Dans cette Note nous avons uniquement pour objet de donner quelques développements à l'extrait du Mémoire de M. Maurice Levy, publié au tome IV de la deuxième série de ce Recueil.

Soient  $Ox$ ,  $Oy$  deux axes rectangulaires tracés dans une section d'un prisme horizontal indéfini de terre;  $i$  l'inclinaison de  $Oy$  sur la verticale;  $N$  et  $T$  les composantes normale et tangentielle de la pression sur un élément plan passant par le point  $(x, y)$  incliné de l'angle  $\theta$  sur  $Oy$ ;  $\chi$  l'angle formé par cette pression avec la normale parallèle aux arêtes du prisme; nous attribuerons à  $\Pi$  et  $\alpha$  les mêmes significations

[\*] Voir notamment notre *Traité de Mécanique générale*, t. II, p. 64.

que ci-dessus, et nous aurons

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} = -\Pi \sin i, \\ \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{xy}}{dx} = \Pi \cos i; \end{cases}$$

$$(24) \quad \begin{cases} N = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} + \frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \cos 2\theta + p_{xy} \sin 2\theta, \\ T = -\frac{p_{xx} - p_{yy}}{2} \sin 2\theta + p_{xy} \cos 2\theta; \end{cases}$$

$$(25) \quad \operatorname{tang} \chi = \frac{N}{T} = \frac{-(p_{xx} - p_{yy}) \sin 2\theta + 2p_{xy} \cos 2\theta}{p_{xx} + p_{yy} + (p_{xx} - p_{yy}) \sin 2\theta + 2p_{xy} \cos 2\theta}.$$

La masse ne pouvant supporter que des pressions et non des tractions, il faut que  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$  et  $N$  soient positifs. Il est facile de reconnaître que le minimum de  $N$  est

$$N = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{p_{xx} - p_{yy}}{2}\right)^2 + p_{xy}^2};$$

et, pour qu'il soit positif, il faut que l'on ait

$$(26) \quad p_{xx} p_{yy} > p_{xy}^2.$$

Le maximum et le minimum de  $\chi$  correspondent aux valeurs de  $2\theta + \chi$  données par l'équation

$$(27) \quad \operatorname{tang}(2\theta + \chi) = -\frac{p_{xx} - p_{yy}}{2p_{xy}}.$$

Mais, si nous supposons que la masse de sable se trouve en équilibre instable, on doit avoir

$$\chi = \pm \alpha,$$

par suite

$$(28) \quad \operatorname{tang}(2\theta \pm \alpha) = -\frac{p_{xx} - p_{yy}}{2p_{xy}},$$

et l'équation (25) donne, par suite,

$$(29) \quad (p_{xx} - p_{yy})^2 - 4p_{xy}^2 \pm (p_{xx} - p_{yy})^2 \sin \alpha = 0 [^*],$$

---

[\*] Dans l'extrait cité plus haut du Mémoire de M. Maurice Levy, on a substitué, par inadvertance,  $\sin^2 \alpha$  à  $\sin \alpha$ , dans cette formule.

et les équations (23) et (29), en ayant égard aux conditions relatives à la surface, permettront de déterminer  $p_{xx}$ ,  $p_{yy}$ ,  $p_{xy}$ .

18. Supposons maintenant que le massif soit indéfini dans le sens transversal et qu'il soit limité à sa partie supérieure par un plan incliné de l'angle  $i$  sur l'horizon; nous ferons coïncider l'axe  $Ox$  avec la trace de ce plan. Les équations (23) et (28) seront satisfaites, ainsi que les conditions  $p_{yy} = 0$ ,  $p_{xy} = 0$  relatives à la surface, en posant

$$(30) \quad p_{yy} = \Pi \cos i, \quad p_{xy} = -\Pi_y \sin i, \quad p_{xx} = -\Pi_{yy} [^*],$$

$a$  étant donné par la double équation

$$n^2(1 \pm \sin \alpha) - 2n \cos i (1 \mp \sin \alpha) + \cos^2 i (1 \pm \sin \alpha) - 4 = 0.$$

Pour que les racines de cette équation soient réelles, il faut que l'on ait

$$1 \pm \sin \alpha > (1 \pm 2 \sin \alpha) \cos^2 i,$$

condition qui ne peut être remplie pour  $i = 0$  qu'en prenant les signes inférieurs; et nous aurons alors

$$(31) \quad n = \frac{(1 + \sin \alpha) \cos i + \sqrt{1 - \sin \alpha - (1 - 2 \sin \alpha) \cos^2 i}}{1 - \sin \alpha} [^{**}].$$

Nous avons rejeté le signe inférieur du radical, parce que, pour le cas d'un liquide ou de  $\alpha = 0$ ,  $i = 0$ , on doit trouver  $n = 1$ .

La condition (26), qui se réduit à

$$\sqrt{1 - \sin \alpha - (1 - 2 \sin \alpha) \cos^2 i} > -\sin \alpha - \cos 2i,$$

sera toujours satisfaite.

[\*] De ce que  $\frac{p_{xy}}{p_{xx}} = -\tan i$ , la pression sur un plan parallèle au talus est bien verticale; mais elle est égale à  $\Pi y$  et non au poids du prisme vertical, comme le suppose Rankine.

[\*\*] Si  $\alpha$  et par suite  $i$  est assez petit pour qu'on en puisse négliger le carré, on a

$$n = 1 + 2 \sin \alpha + \sqrt{\sin \alpha} (1 + \sin \alpha).$$

Les angles  $\theta$  donnés par la formule (27) étant indépendants de  $\alpha$  et  $\gamma$ , tous les plans de glissement sont parallèles.

Supposons maintenant que l'on entaille le massif et que l'on veuille soutenir le talus par un mur construit de telle façon que la répartition des pressions dans la masse soit la même que dans le cas ci-dessus, où cette masse est supposée indéfinie dans le sens transversal. Désignons par  $\alpha'$  l'angle de frottement de la terre sur le mur; l'angle  $\theta$  que devra faire le parement intérieur du mur avec  $Oy$  sera donné par l'équation (25), en y supposant  $\lambda = \alpha'$ , et qui devient

$$(32) \quad \text{tang} \alpha' = - \frac{(n - \cos i) \sin 2\theta - 2 \sin i \cos 2\theta}{n + \cos i + (n - \cos i) \sin 2\theta - 2 \sin i \sin 2\theta}.$$

On voit ainsi que, rigoureusement parlant, l'hypothèse qui consiste à considérer les surfaces de glissement comme planes ne peut se réaliser que dans un cas très-particulier, comme nous l'avons fait observer plus haut dans une Note spéciale.

Revenons au cas d'un massif indéfini transversalement. Supposons qu'il supporte une charge verticale uniformément répartie sur le plan qui le limite à sa partie supérieure et censé horizontal, soit  $\Pi\eta$  la charge par mètre carré de surface. Nous satisferons aux équations (23) et (29), ainsi qu'à la condition relative à la surface, en posant

$$p_{yy} = \Pi(\gamma + \tau), \quad p_{xy} = 0, \quad p_{xx} = n(\gamma + \tau),$$

$n$  étant donné par l'équation (31), en y faisant  $i = 0$ .

*Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans se croisant en un même point d'un corps, et sur celle des déformations qui se produisent autour d'un tel point ;*

PAR M. J. BOUSSINESQ.

I. Lamé, au moyen de son ellipsoïde d'élasticité et d'un autre ellipsoïde ou de deux hyperboloïdes conjugués, a interprété géométriquement, d'une manière en quelque sorte immédiate, les formules par lesquelles Cauchy avait exprimé les pressions exercées sur l'unité d'aire des éléments plans menés par un même point d'un corps. Je me propose de montrer qu'il est possible de simplifier encore la construction de ces pressions, et d'arriver ensuite sans calcul à la connaissance de particularités remarquables, concernant leurs composantes tangentiellles, le rapport de ces composantes aux composantes normales, etc.

Je supposerai qu'on retranche, de toutes les composantes normales dont il s'agit, la demi-somme des deux forces principales la plus grande et la plus petite au point considéré, sans rien changer d'ailleurs aux composantes tangentiellles. On sait que celles-ci et les composantes normales en excédant ne cesseront pas d'être régies par les formules de Cauchy, en sorte qu'il sera permis de faire abstraction de la partie commune retranchée, sauf à la rétablir finalement. Si  $R$  désigne la demi-différence des deux forces principales extrêmes, la plus grande sera donc réduite à  $R$ , la plus petite à  $-R$ , et la force principale intermédiaire ou moyenne aura une certaine valeur,  $T$ , comprise entre  $R$  et  $-R$ .

Je prendrai pour axes coordonnés  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  les droites qui représentent les trois forces principales  $R$ ,  $T$ ,  $-R$  quand on leur ajoute une même quantité, assez grande pour rendre la troisième positive. D'après les formules de Cauchy, la pression  $F$  que supporte l'élément plan dont la normale fait avec ces axes les angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  aura pour composantes respectives

$$R \cos \alpha, \quad T \cos \beta, \quad -R \cos \gamma.$$

Cette pression vaut

$$F = \sqrt{R^2(\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) + T^2 \cos^2 \beta} = \sqrt{R^2 - (R^2 - T^2) \cos^2 \beta}.$$

Elle ne dépend que de  $\beta$  et grandit, de  $\sqrt{T^2}$  à  $R$ , quand  $\beta$  varie, soit de zéro à  $\frac{\pi}{2}$ , soit de  $\pi$  à  $\frac{\pi}{2}$ , ou que l'on considère des éléments superficiels de plus en plus inclinés sur le plan des deux forces principales extrêmes. Elle fait d'ailleurs avec  $Oy$  un angle,  $\beta'$ , dont le cosinus,

$$\cos \beta' = \frac{T}{R} \cos \beta,$$

ne dépend également que de  $\beta$  et est moindre que  $\cos \beta$  en valeur absolue, si ce n'est quand ces cosinus sont nuls ou que  $\beta$ ,  $\beta'$  valent un angle droit. Enfin, si l'on projette sur le plan des  $xz$ , d'une part, la pression considérée, d'autre part, la normale à l'élément plan, ces projections feront avec les axes  $Ox$ ,  $Oz$  des angles ayant leurs cosinus respectivement proportionnels à  $R \cos \alpha$ ,  $-R \cos \gamma$ , pour la première, à  $\cos \alpha$ ,  $\cos \gamma$  pour la seconde, et d'ailleurs de mêmes signes que ces quantités : les deux projections étant ainsi inclinées sur  $Ox$  d'angles égaux, sur  $Oz$  d'angles supplémentaires, seront symétriques par rapport à  $Ox$ .

On construira donc comme il suit la pression  $F$  exercée sur l'élément plan. *A partir de l'origine et dans le plan des deux plus grandes forces principales  $R$ ,  $T$ , on mènera, d'un même côté de la force principale moyenne  $T$ , deux droites inclinées, sur cette force moyenne, l'une, de l'angle donné  $\beta$  que fait avec elle la normale à l'élément superficiel*

proposé, l'autre, de l'angle  $\beta'$  dont le cosinus vaut  $\frac{T}{F} \cos \beta$ , en donnant à celle-ci la longueur  $F = \sqrt{R^2 - (R^2 - T^2) \cos^2 \beta}$ ; puis on imprimera à ces deux droites rotations égales et contraires autour de la force principale moyenne  $T$  : à l'instant où la première droite viendra coïncider avec la normale à l'élément plan, la seconde représentera la pression qui lui est appliquée.

2. C'est dans le plan des  $xz$ , c'est-à-dire quand  $\beta$  et  $\beta'$  valent un droit, que l'inclinaison de la pression  $F$  sur la normale à l'élément qui la supporte varie dans les plus larges limites, vu que ce n'est qu'alors que cette pression peut coïncider, tantôt avec la normale, tantôt avec son prolongement. Ainsi la force  $F$ , qui atteint dans ce plan sa plus grande valeur absolue  $R$ , y devient successivement, soit tout entière normale et positive, soit tout entière normale et négative, soit tout entière tangentielle. Il est évident que la composante tangentielle  $R$ , qu'elle donne dans ce troisième cas, constitue la plus grande de toutes les composantes tangentielles de pression au point considéré; il l'est aussi que les pressions normales  $R$ ,  $-R$ , qu'elle donne dans les deux premiers cas, sont la plus grande et la plus petite des composantes normales de pression, et qu'elles restent la plus grande et la plus petite quand on ajoute à toutes les composantes normales la partie commune dont on avait fait abstraction. De même, lorsqu'on composera cette partie commune avec les forces  $F$ , il n'y aura évidemment pas de résultante plus grande ou plus petite que celle qu'on obtiendra en prenant simplement la somme ou la différence de cette partie commune et de  $R$ .

Considérons enfin le rapport d'une composante tangentielle quelconque de pression à la composante normale correspondante, et comparons-le au rapport analogue, calculé pour la pression qui a composante normale égale, mais qui est contenue dans le plan des  $xz$ . La plus grande des deux composantes tangentielles considérées est celle dont le carré, joint au carré de l'excédant commun de la composante normale sur la demi-somme des deux forces principales extrêmes, donne la plus grande valeur de  $F^2$ . C'est donc celle qui est comprise dans le plan des  $xz$ , et son rapport à la composante normale est le

plus grand des deux en valeur absolue. En d'autres termes, des deux pressions totales considérées, celle que contient le plan des  $xz$  fait le plus petit angle avec l'élément superficiel qu'elle sollicite.

*C'est donc, en résumé, dans le plan des deux forces principales extrêmes qu'il faut chercher tout à la fois : 1° la plus grande et la plus petite des pressions ; 2° la plus grande et la plus petite des composantes normales de pression ; 3° la plus grande des composantes tangentielles ; 4° la pression la moins inclinée sur l'élément plan qui la supporte.*

5. Une construction exactement pareille permet de représenter, après des déformations quelconques, tous les éléments matériels rectilignes, d'une même longueur primitive infiniment petite, qu'on peut concevoir menés à partir d'un point déterminé O d'un corps. Si l'on prend leur longueur primitive constante pour unité et qu'on rapporte ces diverses lignes à trois axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , dirigés suivant les trois éléments, dits *principaux*, qui sont rectangulaires entre eux après comme avant les déformations, on sait que les projections, sur ces axes, de l'élément quelconque qui faisait avec eux les angles  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , auront respectivement de

$$d_1 \cos \alpha, \quad d_2 \cos \beta, \quad d_3 \cos \gamma,$$

$d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  désignant les trois dilatations principales (supposées rangées par ordre de grandeur décroissante). Ces accroissements se composent respectivement : 1° d'une partie

$$\frac{1}{2}(d_1 + d_3) \cos \alpha, \quad \frac{1}{2}(d_1 + d_3) \cos \beta, \quad \frac{1}{2}(d_1 + d_3) \cos \gamma,$$

dont l'effet est d'allonger de  $\frac{1}{2}(d_1 + d_3)$  tous les éléments rectilignes considérés, sans changer leur direction ; 2° d'une autre partie

$$\frac{d_1 - d_3}{2} \cos \alpha, \quad \frac{2d_2 - (d_1 + d_3)}{2} \cos \beta, \quad - \frac{d_1 - d_3}{2} \cos \gamma,$$

qu'on pourra écrire

$$R \cos \alpha, \quad T \cos \beta, \quad - R \cos \gamma,$$



si l'on pose

$$R = \frac{\partial_1 - \partial_3}{2}, \quad T = \partial_2 - \frac{\partial_1 + \partial_3}{2}.$$

Il faudra évidemment, pour construire chaque élément rectiligne après les déformations, composer géométriquement la droite primitive  $r$ , augmentée de  $\frac{1}{2}(\partial_1 + \partial_3)$ , avec une autre droite, F, dont les projections sur les axes seraient

$$R \cos \alpha, \quad T \cos \beta, \quad - R \cos \gamma.$$

C'est à celle-ci que s'applique la construction indiquée au n° 1. La projection de cette droite F sur la direction qui fait avec les axes les angles  $\alpha, \beta, \gamma$ , projection à laquelle convient actuellement le nom de *composante tangentielle* plutôt que celui de *composante normale*, s'ajoute à  $\frac{1}{2}(\partial_1 + \partial_3)$  pour donner la *dilatation* totale qu'a éprouvée la projection de l'élément rectiligne sur sa direction première, dilatation dont la différence à celle de l'élément proposé est de l'ordre des carrés ou des produits de  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ , et le plus souvent négligeable. L'autre composante de la même droite F, *composante normale* et non plus tangentielle, mesure le déplacement de l'extrémité de l'élément rectiligne dans le sens perpendiculaire à sa direction primitive; divisée par la projection finale de l'élément rectiligne sur sa direction première, elle donne la tangente de l'angle qui représente le changement total de direction éprouvé par l'élément. On reconnaît, en raisonnant comme ci-dessus (n° 2), dans le cas où l'on cherchait le plus petit angle d'une pression avec l'élément plan qu'elle sollicite, que ce changement de direction devient maximum pour des éléments rectilignes situés dans le plan des deux dilatations principales extrêmes  $\partial_1, \partial_3$ .

D'ordinaire, les déformations sont petites, la projection d'un élément rectiligne sur sa direction première diffère peu de  $r$ , et la composante normale du déplacement de l'extrémité mesure à elle seule le changement de direction de l'élément rectiligne. Alors ce changement de direction est le plus grand possible, égal à R ou  $\frac{1}{2}(\partial_1 - \partial_3)$ , pour les quatre éléments bissecteurs des angles des deux axes O*x*, O*z*,

c'est-à-dire des angles formés par les deux dilatations principales extrêmes  $\partial_1, \partial_3$ ; en outre, il se fait symétriquement de part et d'autre de  $Ox$  et de  $Oz$ , en sorte que l'angle de deux de ces éléments qui étaient primitivement rectangulaires éprouve une variation double de  $R$  ou égale à  $\partial_1 - \partial_3$ . Il est évident qu'il n'y a pas d'autres éléments rectilignes, primitivement rectangulaires ou non, qui se rapprochent ou s'écartent mutuellement autant que ceux-là, par suite des déformations. Le *glissement maximum* de deux éléments rectilignes égale donc la différence des deux dilatations principales extrêmes; résultat bien connu en ce qui concerne deux éléments *rectangulaires*, mais qui n'avait peut-être pas été démontré aussi simplement.



*Des formes quadratiques binaires et ternaires* [\*];

PAR M. ÉDOUARD SELLING.

IV. — FORMES TERNAIRES INDÉFINIES.

a. — *Relations avec les formes positives correspondantes.*  
*Formes réduites.*

De même que la théorie des formes positives  $f$  comprend celle des négatives  $-f$ , de même aussi la théorie d'une espèce des formes indéfinies  $f$ , de laquelle seule je veux traiter, comprend celle des autres  $-f$ . Pour cela, je suppose que l'invariant des formes  $f$  ne soit pas négatif, et provisoirement qu'il ne soit pas zéro. Ces formes  $f$  ou  $\begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix}$  peuvent ensuite se changer en la forme  $x^2 - y^2 - z^2$  par une substitution homogène linéaire à coefficients réels quelconques. Pour ramener la transformation et la réduction de ces formes à celles des formes positives, j'établis le système des équations

$$(9) \begin{cases} \xi^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = a, & \eta^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 = b, & \zeta^2 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = c, \\ \eta\xi - \eta_1\xi_1 - \eta_2\xi_2 = g, & \zeta\xi - \zeta_1\xi_1 - \zeta_2\xi_2 = h, & \zeta\eta - \zeta_1\eta_1 - \zeta_2\eta_2 = k, \end{cases}$$

dans lesquelles  $\xi, \eta, \zeta, \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$  doivent être des variables continues qui parcourent toutes les valeurs réelles possibles. Si l'on détermine par celles-ci, au moyen des équations (7), six quantités variables  $a, b, c, g, h, k$ , et si l'on considère une forme  $\begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix}$  ou  $f$ , qui a ces quantités pour coefficients, cette forme  $f$  on

$$(\xi x + \eta y + \zeta z)^2 + (\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z)^2 + (\xi_2 x + \eta_2 y + \zeta_2 z)^2$$

devient positive pour toutes les valeurs admissibles de ses coefficients variables; je l'appelle *la forme positive correspondant à la forme  $f$* .

[\*] Voir, pour la première partie de ce Mémoire, t. III, p. 21 de ce Recueil.

Les équations (9) entraînent les équations

$$(10) \begin{cases} \Xi^2 - \Xi_1^2 - \Xi_2^2 = A, & H^2 - H_1^2 - H_2^2 = B, & Z^2 - Z_1^2 - Z_2^2 = C, \\ HZ - H_1Z_1 - H_2Z_2 = G, & Z\Xi - Z_1\Xi_1 - Z_2\Xi_2 = H, \\ \Xi H - \Xi_1H_1 - \Xi_2H_2 = K, \end{cases}$$

dans lesquelles A, B, C, G, H, K désignent les coefficients de la forme F adjointe à  $f$ ; car les équations (9), (10) proviennent des équations (7), (8), que je résume par

$$(7a) \quad \begin{vmatrix} a & k & h \\ k & b & g \\ h & g & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix},$$

$$(8a) \quad \begin{vmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{H} & \mathfrak{Z} \\ \mathfrak{H} & \mathfrak{U} & \mathfrak{C} \\ \mathfrak{Z} & \mathfrak{C} & \mathfrak{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Xi & \Xi_1 & \Xi_2 \\ H & H_1 & H_2 \\ Z & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Xi & H & Z \\ \Xi_1 & H_1 & Z_1 \\ \Xi_2 & H_2 & Z_2 \end{vmatrix},$$

si l'on multiplie par le facteur  $\sqrt{-1}$  les quantités  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2, \Xi_1, H_1, Z_1, \Xi_2, H_2, Z_2$ , chaque fois dans les deux systèmes placés à droite de ces équations, ou par le facteur  $-1$  chaque fois dans un des deux systèmes. Et l'on reconnaît l'exactitude des équations (10) à ce que, dans cette transformation, abstraction faite de la modification, ici indifférente, des signes de  $\Xi, H, Z$ , les deux systèmes, à droite de l'équation (8a), restent les adjoints des correspondants de (7a), d'où résulte que le système se produisant à gauche de (8a) reste l'adjoint du système se produisant à gauche de (7a) et exprimé

par  $\begin{vmatrix} a & k & h \\ k & b & g \\ h & g & c \end{vmatrix}$ . En même temps, on reconnaît que l'invariant des formes  $f$  et  $f$  est le même; je le désigne par  $I$ . Si, dans l'une des relations obtenues par (8a), on ajoute des deux côtés, de la manière déjà

employée, le système  $\begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & K & H \\ K & B & G \\ H & G & C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \Xi & -\Xi_1 & -\Xi_2 \\ H & -H_1 & -H_2 \\ Z & -Z_1 & -Z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Xi & H & Z \\ \Xi_1 & H_1 & Z_1 \\ \Xi_2 & H_2 & Z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \Xi & -\Xi_1 & -\Xi_2 \\ H & -H_1 & -H_2 \\ Z & -Z_1 & -Z_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{I} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{I} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{I} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Des neuf équations comprises là-dedans, trois nous apprennent que  $\sqrt{I} \cdot \Xi$ ,  $\sqrt{I} \cdot \Pi$ ,  $\sqrt{I} \cdot Z$  sont les demi-dérivées de  $F(\xi, \eta, \zeta)$  relatives à  $\xi, \eta, \zeta$ . L'équation  $\xi \Xi + \eta \Pi + \zeta Z = \sqrt{I}$  se change donc en

$$(11) \quad F(\xi, \eta, \zeta) = I.$$

Comme pareillement  $\sqrt{I} \cdot \xi$ ,  $\sqrt{I} \cdot \eta$ ,  $\sqrt{I} \cdot \zeta$  sont démontrées être les demi-dérivées de  $f(\Xi, \Pi, Z)$  relatives à  $\Xi, \Pi, Z$ , on a aussi

$$(12) \quad f(\Xi, \Pi, Z) = I.$$

On tire immédiatement les relations entre les coefficients de  $f, f, F, F$  de (11) ou (12) et des équations

$$(13) \quad \begin{cases} a = 2\xi^2 - a, & b = 2\eta^2 - b, & c = 2\zeta^2 - c, \\ g = 2\eta\zeta - g, & h = 2\xi\zeta - h, & k = 2\xi\eta - k, \end{cases}$$

ou

$$(14) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = 2\Xi^2 - A, & \mathfrak{B} = 2\Pi^2 - B, & \mathfrak{C} = 2Z^2 - C, \\ \mathfrak{G} = 2\Pi Z - G, & \mathfrak{H} = 2Z\Xi - H, & \mathfrak{K} = 2\Xi\Pi - K. \end{cases}$$

En effet, les invariants simultanés suivants deviennent

$$(15) \quad Aa + Bb + Cc + 2Gg + 2Hh + 2Kk = -I,$$

$$(16) \quad a\mathfrak{A} + b\mathfrak{B} + c\mathfrak{C} + 2g\mathfrak{G} + 2h\mathfrak{H} + 2k\mathfrak{K} = -I,$$

ce qui résulte aussi sur-le-champ de ce que les invariants des formes  $f + f$  et  $f - f$  s'évanouissent. Du premier, du déterminant  $8\Sigma \pm \xi^2 \eta^2 \zeta^2$ , disparaissent aussi tous les premiers déterminants mineurs. Donc on peut de (15) éliminer encore trois des nombres  $a, b, c, g, h, k$ . On obtient, par exemple, au moyen de

$$(a + n)(b + b) = (k + k)^2, \quad (a + n)(g + g) = (k + k)(h + h), \\ (a + n)(c + c) = (h + h)^2,$$

tant que  $n$  n'est pas zéro ou infini,

$$(17) \quad F(a, k, h) = aI,$$

relation identique avec (15).

On obtient de même

$$(18) \quad f(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) = \Lambda I.$$

Si  $f$  et  $\mathfrak{f}$  se changent en  $f'$  et  $\mathfrak{f}'$  par la substitution  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ ,  $\mathfrak{f}'$  est aussi une forme positive correspondant à  $f'$ , comme cela résulte déjà des propriétés d'invariants énoncées.

Les quantités intermédiaires  $\xi', \dots$  sont celles qui ont déjà été indiquées; elles peuvent encore être exprimées sommairement par l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha' & \alpha'_1 & \alpha'_2 \\ \alpha'' & \alpha''_1 & \alpha''_2 \\ \alpha''' & \alpha'''_1 & \alpha'''_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi & \xi_1 & \xi_2 \\ \eta & \eta_1 & \eta_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{vmatrix},$$

ou

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Le rapprochement des deux expressions donne

$$\begin{vmatrix} a' & k' & h' \\ k' & b' & g' \\ h' & g' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & k & h \\ k & b & g \\ h & g & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

et, si l'on procède aux changements précités de  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ , qui entraînent après eux les changements pareils de  $\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, \xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2$ , on obtient

$$\begin{vmatrix} a' & k' & h' \\ k' & b' & g' \\ h' & g' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & k & h \\ k & b & g \\ h & g & c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

Le système des extrémités des longueurs  $\alpha(a) + \beta(b) + \gamma(c)$ , ayant un même point de départ, est maintenant variable, et cela de telle sorte que chacun de ses points peut se mouvoir sur un hyperboloïde de révolution équilatère, qui lui est propre, et dont le centre est le point initial, et dont l'axe de révolution est l'axe de  $\xi, \eta, \zeta$ . Comme nous ne trouvons, dans les équations (7), que des combinai-

sons des quantités  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ , qui ne changent pas quand le système tourne autour de cet axe, on pourrait admettre que l'une de ces grandeurs,  $\zeta_2$  par exemple, est constamment  $= 0$ ; et quand, par hypothèse,  $a > 0$ , regarder  $\xi_1, \xi_2$  comme des variables indépendantes, dont sont fonctions les huit systèmes de valeurs réelles des autres variables satisfaisant aux équations (9). De deux systèmes de valeurs, dont résultent pour  $a, b, c, g, h, k$  les mêmes valeurs, je n'en admettrai qu'un, correspondant au

signe supérieur dans l'équation 
$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \end{vmatrix} = \pm \sqrt{I}$$
, de sorte que

chaque point reste assigné à l'une des deux nappes de son hyperboloïde, si l'hyperboloïde en a deux. Des deux systèmes distincts de valeurs  $\xi, \eta, \zeta$ , satisfaisant à l'équation (11), un seulement est admis. Et si l'on veut introduire une nouvelle figure géométrique, on peut regarder  $\xi, \eta, \zeta$  comme coordonnées d'un point mobile sur une nappe d'un hyperboloïde à deux nappes.

Je ramène maintenant aussi, pour les formes quadratiques ternaires, la réduction des indéfinies à celle des formes positives, et, sous la réserve de restrictions ultérieures, j'appelle *réduite une forme indéfinie, quand, d'après ma définition, la forme positive correspondante est réduite pour un système admissible quelconque des valeurs des variables introduites*. On obtient, pour chaque classe, une forme réduite quand, à une forme  $f$  quelconque de cette classe, ou forme la correspondante  $f$  au moyen de n'importe quel système admissible des valeurs de ces variables-là et que l'on applique à  $f$  une substitution qui puisse changer  $f$  en une réduite. On obtient toutes les formes réduites de cette classe, si l'on agit de même à l'égard de tous les systèmes admissibles de valeurs; de sorte que, dans la première figure et pour  $\zeta_2 = 0$ , le point  $\xi, \eta, \zeta$  prend toutes les positions sur l'une des nappes de l'hyperboloïde  $\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 = a$ , ou, dans la seconde figure, que je suivrai désormais, le point  $\xi, \eta, \zeta$  prend toutes les positions sur l'une des nappes de l'hyperboloïde  $F(\xi, \eta, \zeta) = I$ .

*b. — Points angulaires des champs des formes réduites.  
Axes de symétrie.*

Ces nappes se divisent en champs tels que, pour tous les points d'un champ, la même forme  $f'$  est réduite, tandis que, sur les limites, des coefficients variables de cette forme,  $g'$ ,  $h'$ ,  $k'$ ,  $l'$ ,  $m'$  ou  $n'$  sont égaux à zéro. Comme il s'agit seulement de trouver de quelle manière ces champs sont reliés entre eux, et comme cette manière ne change pas, si l'on prend pour base, au lieu de  $f$ , une forme équivalente quelconque, on peut, dans tous les cas, prendre pour bases d'autres formes équivalentes, le plus simplement celles dont les formes positives correspondantes sont elles-mêmes réduites et que je désigne aussi par  $f$ . Toutefois, j'exclus provisoirement le cas où l'un des nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ou  $D = F(1, 1, 1)$  deviendrait égal à zéro. Pour reconnaître les champs, on n'a besoin que de considérer les lignes de leurs limites, et pour reconnaître les lignes limites on n'a qu'à considérer leurs points extrêmes, c'est-à-dire les points d'intersection de deux de ces lignes; aucun champ, en effet, ne peut être borné par une ligne rétrogradant sur elle-même; car si, par exemple, cette ligne était  $k = 0$ , à deux points de cette ligne  $\frac{\partial F(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}$  ou  $Z$  disparaîtrait nécessairement. Il faudrait donc que  $C < 0$ , et l'équation (11) se changerait en l'équation (4), qui pourtant, avec  $k = 0$ , n'admet pas deux solutions réelles. Les points à considérer sont de deux espèces essentiellement différentes, suivant que les deux coefficients qui disparaissent sont ou non sur une ligne verticale dans le système  $\begin{Bmatrix} g, h, k \\ l, m, n \end{Bmatrix}$ . Au point  $h = m = 0$ , par exemple, suivant III, *b*, alinéa 7, trois champs se rencontrent de telle sorte que, par la substitution  $\begin{Bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{Bmatrix}$ , les formes positives correspondantes se changent cycliquement les unes en les autres. Comme lignes limites, entre les trois champs, partent du point  $h = m = 0$  les lignes  $h = 0$ ,  $h = m$  et



$m = 0$ , de sorte que chacune de ces lignes n'existe que d'un côté du point. Comme à un point semblable une ligne se fend en deux, j'appelle ce point *un point de fissure*. La condition d'après laquelle on peut obtenir  $h' = m' = 0$ , tandis que  $f'$  est réduite, s'exprime facilement par la condition d'après laquelle, dans une

forme  $f$ , d'où résulte  $f'$  par la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ , on peut obtenir  $g = h = k$  : donc

$$A \frac{(k+h)(k+h)}{k+g} + B \frac{(k+h)(k+g)}{k+h} + C \frac{(k+g)(k+h)}{k+k} \\ + 2G(k+g) + 2H(k+h) + 2K(k+k) = 2I,$$

tandis que  $k$  n'est pas négatif et n'est pas plus grand que  $a$ ,  $b$  ou  $c$ , ou, ce qui est la même chose, que, si l'on met  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  pour  $a - k$ ,  $b - k$ ,  $c - k$  ou

$$\frac{g-h}{k+g} \frac{(g-k)}{k+g} + h + k - a - g, \quad \frac{h-k}{k+h} \frac{h-g}{k+h} + k + g - b - h, \\ \frac{k-g}{k+k} \frac{k-h}{k+k} + g + h - c - k,$$

on obtienne  $A\lambda + B\mu + C\nu + Dk = -I$ , et que  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $k$  ne soient pas négatives. Une solution effective de cette équation du quatrième degré en  $k$  n'est jamais nécessaire, et même la question de l'existence de racines réelles, en deçà de certaines limites, est vidée, autant que c'est nécessaire, sans calcul par les considérations qu'on verra plus bas. Au point  $h = k = 0$ , par contre, aboutissent simultanément six champs, dont les formes réduites proviennent cycliquement les unes des autres, conformément à ce que nous avons observé

plus haut, à l'alinéa 8, au moyen de la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ .

Les champs sont séparés les uns des autres dans le même ordre cyclique par les lignes  $h = 0$ ,  $h + k = 0$ ,  $k = 0$  et leurs prolongations rétrogrades. J'appelle ces points *points de croisement*. L'équa-

tion (17), avec  $h = k = 0$ , donne

$$(19) \quad a = \sqrt{\frac{a}{A}} I, \quad b = \frac{k^2}{a + \sqrt{\frac{a}{A}} I} - b = \frac{-C - b \sqrt{\frac{a}{A}} I}{a + \sqrt{\frac{a}{A}} I},$$

$$c = \frac{h^2}{a + \sqrt{\frac{a}{A}} I} - c = \frac{-B - c \sqrt{\frac{a}{A}} I}{a + \sqrt{\frac{a}{A}} I},$$

$$g = \frac{hk}{a + \sqrt{\frac{a}{A}} I} - g = \frac{G - g \sqrt{\frac{a}{A}} I}{a + \sqrt{\frac{a}{A}} I};$$

puis, au moyen de l'équation (18), et de  $\mathfrak{H} = \mathfrak{K} = 0$ , on obtient encore

$$\mathfrak{A} = \sqrt{\frac{\Lambda}{a}} I, \quad \mathfrak{B} = \frac{K^2}{A + \sqrt{\frac{\Lambda}{a}} I} - B = \frac{-cI - B \sqrt{\frac{\Lambda}{a}} I}{A + \sqrt{\frac{\Lambda}{a}} I} \dots$$

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut seulement que  $a$  et  $A$  aient les mêmes signes, et si c'est le négatif, il faut encore, pour que  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  deviennent aussi réelles, que  $aA$  soit  $\leq I$ , condition qui se réalise d'elle-même quand  $A$  est positive, comme il résulte de

$$I = aA + kK + hH = aA - (bh^2 - 2ghk + ck^2),$$

où la forme quadratique binaire, placée entre parenthèses, est alors négative. Ici non plus une détermination effective de la racine n'est jamais nécessaire, mais seulement quelquefois un essai pour savoir si elle atteint ou non certaines limites. Il est aisé de voir maintenant que la forme  $\begin{Bmatrix} a, b, c \\ g, 0, 0 \end{Bmatrix}$  ou bien est réduite ou se

transforme en une réduite par une substitution  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{bmatrix}$ , suivant

que la forme binaire  $(b, g, c)$  est elle-même réduite ou se transforme en une réduite par la substitution  $\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ . A la place de  $(b, g, c)$  se mettent, en cas de réduction, dans les autres formes ternaires qui sont réduites pour les champs aboutissant au point de croisement, les formes binaires résultant de  $(b, g, c)$  par la permutation cyclique des trois coefficients extrêmes et la substitution  $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ . Chaque système de coefficients entiers  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \lambda, \mu, \nu$  qui satisfont aux conditions  $1 = \alpha\lambda + \alpha_1\mu + \alpha_2\nu$  et  $0 < f(\alpha, \alpha_1, \alpha_2) \cdot F(\lambda, \mu, \nu) \leq I$  détermine un point de croisement et un seulement.

La question de savoir comment les champs sont reliés les uns aux autres peut maintenant se ramener à la recherche de tous les points de croisement. Il est, à vrai dire, possible qu'un champ n'ait aucun point de croisement, mais seulement des points de fissure à ses limites; toutefois, qu'une ou deux portions de deux lignes, comme  $h = 0$  et  $m = 0$ , forment la limite de ce champ, la ligne  $h - m = 0$  seule sera à considérer à l'égard des champs avoisinants. Ces champs se comportent alors comme si les branches respectives de la ligne  $h - m = 0$  n'eussent pas été interrompues par les lignes  $h = 0$  et  $m = 0$ .

On doit examiner encore spécialement les cas exceptionnels dans lesquels, conformément à ce qui a été dit plus haut, III, *b, g*, plusieurs des points étudiés coïncident. Soit, dans un point  $g = h = k = 0$ , et admettons pour la symétrie que les signes de  $g, h$  et  $k$  ne soient les mêmes dans aucun des six fragments de surface séparés par les lignes  $g = 0, h = 0, k = 0$ , ce qui, au besoin, peut être amené par l'emploi d'une des

substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ . Qu'on se figure

ensuite une des trois lignes  $g = 0, h = 0$  ou  $k = 0$  déplacée d'une quantité infiniment petite, de telle sorte qu'il en résulte un triangle infiniment petit, dans l'intérieur duquel  $g, h$  et  $k$  soient négatifs et  $f$  réduite. Les trois sommets de ce triangle sont alors des points de croisement. Quant aux six champs qui les entourent, ceux qui sont adjacents aux côtés du triangle appartiennent à deux de ces points, tandis que le triangle lui-même appartient à la fois aux trois points. Les deux lignes  $g + h = 0$  et  $g + k = 0$  bornent le fragment de

surface qui est adjacent au côté du triangle  $g = 0$ , et dans lequel

la forme résultant de  $f$  par la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$  est réduite.

Ces deux lignes se rencontrent en un point de fissure et y ont comme continuation commune la ligne  $h = k$ . Ce champ devient aussi infiniment petit. Attendu qu'il en est de  $h$  et  $k$  comme de  $g$ , on reconnaît que, si on laisse les points coïncider de nouveau, et qu'on ne tienne pas compte des champs dégénérent en un point, neuf champs se trouvent placés autour du point  $g = h = k = 0$  et sont séparés les uns des autres, d'une part par les lignes  $g = 0$ ,  $h = 0$ ,  $k = 0$ , et de l'autre par les lignes  $h = k$ ,  $k = g$ ,  $g = h$ . Au même point se restreignent aussi les champs des trois formes encore restantes des seize formes essentiellement différentes et réduites en ce point, les-

quelles résultent de  $f$  au moyen des substitutions  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ .

Si deux lignes limites coïncident en une seule, comme, par exemple, quand  $g = h = 0$ , les lignes  $g = 0$  et  $h = 0$  se confondant en la ligne  $\zeta = 0$ , alors la condition prescrite à la forme  $f$  est aussi remplie par la forme qui coïncide numériquement avec elle et qui en résulte

au moyen de la substitution  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ; dans ce cas, quatre des neuf

champs généralement finis dégèrent en la ligne  $\zeta = 0$ , avec laquelle coïncident aussi les lignes  $g + h = 0$  et  $g - h = 0$ . Sur le côté positif de la ligne  $k = 0$  restent les champs des deux formes concordant numériquement l'une avec l'autre et provenant de  $f$  par les substitu-

tions  $\begin{vmatrix} \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ; sur le côté négatif, se présentent, de part et

d'autre, les champs des formes concordant numériquement et qui

résultent de  $f$  par les substitutions  $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \pm 1 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ . L'autre ligne

limite de chacun de ces deux champs, passant par le point, est

$\pm h - k = 0$  ou  $\mp g - k = 0$ , suivant que la valeur absolue de  $\eta$  est plus grande ou plus petite que celle de  $\xi$ . Les formes, concordant numériquement entre elles, des champs suivants de part et d'autre et s'étendant jusqu'à la ligne  $\zeta = 0$ , résultent donc de  $f$ ,

ou par les substitutions  $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 & \mp 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ , ou par les substitutions

$\begin{vmatrix} \mp 1 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \mp 1 & 0 & \pm 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ . Un seulement de ces deux champs aurait été fini,

dans le cas plus général, l'autre eût dégénéré en un point. Se trouveront réduits à ce point les champs des deux formes provenant de  $f$  par

les substitutions  $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & \mp 1 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ ; quant à ceux des huit formes res-

tantes, ils dégénèrent en la ligne  $\zeta = 0$ , savoir, quatre dont les formes ont été nommées ici, sur le côté négatif, et quatre sur le côté positif de la ligne  $k = 0$ . On reconnaît aussi cette dernière particularité à ce que chaque point de la ligne  $\zeta = 0$  a les propriétés d'un point de croisement, où les trois lignes qui se coupent coïncident en une seule, où, par conséquent, quatre des six champs dégénèrent en cette ligne et où les formes des deux champs adjacents peuvent être converties l'une en

l'autre par la substitution  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

Comme les formes des champs placés immédiatement des deux côtés de la ligne  $\zeta = 0$  concordent numériquement entre elles et que, par la forme appartenant à un champ, les formes de tous les champs voisins sont déterminées complètement, cette ligne forme en quelque sorte un axe de symétrie, des deux côtés duquel, même aux distances plus grandes, la division en champs est pareille; il s'ensuit que, pour reconnaître tous les champs, on n'a pas besoin de dépasser cette ligne. De cette espèce sont, dans la *fig. 1* (*voir la Planche*), qui représente la division en champs pour une classe de formes, à nombres entiers et à l'invariant 60, quatre des six lignes limites externes. On n'y a inscrit que les formes dont les champs ont une étendue finie, en les plaçant à leur intérieur. Les lettres mises aux lignes limites désignent celles des quantités variables qui deviennent égales à zéro, le long de celles-ci, et la désignation est toujours choisie par rapport à la forme, dans

le champ de laquelle la lettre est placée. Ce que  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  sont par rapport à  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , c'est  $\omega$  par rapport à  $d$ . Dans chacune de ces formes, pour exclure l'arbitraire, l'ordre des coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  est choisi de telle sorte qu'ils forment une progression décroissante et qu'aussi, parmi les coefficients  $g$ ,  $h$ ,  $k$ ,  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , chaque fois le premier, non encore déterminé, devienne aussi grand que possible. Mais, pour les substitutions indiquées dans le texte, à l'égard desquelles on pourrait désirer différents ordres des  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  correspondant aux différentes lignes limites d'un champ, il est admis que ces ordres ont d'abord été modifiés de part et d'autre, en cas de besoin.

Si, aux conditions dernièrement étudiées,  $g = h = 0$ , se joint encore  $k = 0$ , et si  $\eta$  est le facteur, devenant zéro, de  $k$ , de sorte que l'une des deux branches de la ligne  $g = 0$  coïncide avec  $h = 0$ , l'autre, avec  $k = 0$ , les conditions prescrites à la forme  $f$  sont remplies par quatre formes concordant numériquement entre elles, lesquelles proviennent

les unes des autres par les substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , et dont les champs dégénèrent chacun en systèmes de deux lignes, savoir : d'une portion de la ligne  $\zeta = 0$ , et d'une portion de la ligne  $\eta = 0$ .

Une étendue finie n'est donnée qu'aux quatre champs compris chacun entre deux de ces portions de lignes et dont les formes, qui d'ailleurs concordent numériquement entre elles, proviennent des quatre susdites par la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ . A cette espèce appartiennent trois des angles externes de la *fig. 1*.

Si, par contre, et sans avoir  $k = 0$ , dans le cas  $g = h = 0$ , la ligne  $\zeta = 0$  est coupée par la ligne  $\eta = 0$ , l'autre partie de la ligne  $g = 0$ , les formes de deux champs séparés par la ligne  $\zeta = 0$  se chan-

gent, par la substitution  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ , en les formes de deux autres champs qui avaient jusque-là dégénéré en cette ligne. De tels points sont placés sur la ligne limite à droite et à l'extrémité inférieure de la ligne limite gauche de la *fig. 1*.

A l'aide des substitutions énoncées, III,  $b$ , non-seulement des formes positives réduites, mais encore des formes quadratiques ternaires quelconques se transforment en elles-mêmes, quand elles remplissent les conditions indiquées, et toutes ces conditions peuvent être remplies par des formes indéfinies, excepté celles qui, pour  $z$  et  $\lambda$ , donnent la valeur 24. Si les conditions énoncées, de 1 à 4, sont satisfaites dans des formes indéfinies réduites, on trouve, aux lignes limites de leurs champs, une symétrie en  $z$  sections, et, par suite de cela, aussi dans toute l'ordonnance des champs plus ou moins avoisinants. Au cas 1,  $a = b$ ,  $g = h$ ,  $l = m$ , appartient, dans la *fig. 1*,

les formes  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 2 \\ & -1 & -3 & 2 \\ & & -2 & 8 \\ & & & -12 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 & 1 \\ & -1 & -2 & 1 \\ & & -12 & 16 \\ & & & -18 \end{vmatrix}$ . L'axe de la

symétrie à deux sections est indiqué par la ligne ponctuée. Au cas 2,

$a = b$ ,  $c = d$ ,  $g = l$ ,  $h = m$ , appartient la forme  $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 & 4 \\ & -1 & 4 & -1 \\ & & -9 & 6 \\ & & & -9 \end{vmatrix}$

de la *fig. 1*. Si les conditions énoncées, de 6 à 9, sont remplies dans des formes indéfinies réduites, des lignes limites déterminées peuvent alors aussi se montrer comme axes de la symétrie. Au cas 6 appar-

tient la forme  $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 & 3 \\ & -1 & 3 & 3 \\ & & -2 & 0 \\ & & & -6 \end{vmatrix}$  de la *fig. 1*, dans laquelle  $n = 0$ ,

$m = l$ , où donc, par analogie avec le cas  $h = 0$ ,  $g = n$ , on a

$\lambda = 2z = 2$ , et la forme  $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 1 & 3 \\ & 3 & 1 & 3 \\ & & -2 & 0 \\ & & & -6 \end{vmatrix}$ , dans laquelle  $n = 0$ ,

$m = l$ ,  $g = h$ , où donc, par analogie avec le cas  $h = 0$ ,  $g = n$ ,

$k = l$ , on a  $\lambda = 2z = 4$ , de plus, les formes  $\begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ & -2 & 0 & 5 \\ & & -6 & 3 \\ & & & -9 \end{vmatrix}$

et  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 & -1 \\ & -2 & 0 & 1 \\ & & -6 & 9 \\ & & & -9 \end{vmatrix}$ , pour lesquelles  $\lambda = 2z = 2$ .

Au cas 7 appartiennent les formes

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ & 3 & 1 & 0 \\ & & -9 & 8 \\ & & & -9 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 & 0 \\ & -2 & 0 & 1 \\ & & -4 & 8 \\ & & & -9 \end{vmatrix},$$

pour lesquelles  $\lambda = 2$ ; la première concorde avec elle-même, après modification convenable de l'ordre des  $a, b, c, d$ , la deuxième avec une troisième, dont le champ a un point de fissure commun avec ceux des deux premières.

Les cas 8,  $h = k = 0$ , auxquels appartient, pour  $\lambda = 4$ , la forme

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ & -1 & -1 & 0 \\ & & -18 & 20 \\ & & & -20 \end{vmatrix}, \text{ et } g = h = k = 0, \text{ ont déjà été discutés plus}$$

haut.

Nous avons ainsi épuisé les cas dans lesquels deux formes, concordant numériquement l'une avec l'autre, peuvent appartenir au même champ ou à deux champs contigus l'un à l'autre le long d'une ligne.

### c. — Manières de trouver les champs.

Pour trouver, à partir d'un point de croisement  $h = k = 0$ , les autres du même champ, il faut d'abord rechercher s'il y a des points de croisement  $h = l = 0$ ,  $h = g = 0$ ,  $h = n = 0$ , ce qui exige que  $a$  et  $cd - n^2$ ,  $c$  et  $ab - k^2$ ,  $c$  et  $ad - l^2$  aient les mêmes signes, et, quand ils sont négatifs, ils aient un produit n'excédant pas l'invariant; enfin que les formes binaires  $(r, u, v)$ ,  $(a, k, b)$ ,  $(a, l, d)$  à considérer suivant (19) soient réduites respectivement. Des points de croisement que l'on trouve réellement, il n'y en peut guère avoir qu'un seul avec  $h = k = 0$  sur la même partie de la ligne  $h = 0$ , et je ne veux considérer comme tel que le point  $h = g = 0$ , attendu qu'il en serait de même des deux autres, dans le cas présent. Car les deux lignes  $h = 0$ ,  $g = 0$  ne peuvent pas, d'après (19), avoir plus d'un point d'intersection réel et si la partie à étudier de la ligne  $h = 0$  est entrée, auprès d'un tel point, dans la région de la nappe hyperbo-



loïdale, où  $g > 0$ , il n'en serait ainsi qu'autant qu'elle rentrerait dans la région où l'on a  $g < 0$ . Tous les points situés sur une branche de la ligne  $h = 0$  se distinguent de ceux qui sont situés sur l'autre par les signes de  $\xi$  et  $\zeta$ , dans le cas où une nappe de l'hyperboloïde (11) est coupée par deux nappes de l'hyperboloïde  $2\xi\zeta = h$ , savoir, quand B est positif et par conséquent  $a$  et  $c$  négatifs; et ils se distinguent par les signes de H dans le cas où une nappe de l'hyperboloïde (11) est coupée seulement par une nappe de l'hyperboloïde  $2\xi\zeta = h$ , mais en deux parties, ce qui a lieu quand B,  $a$  et  $c$  sont négatifs. Quand les signes de  $a$  et  $c$  sont différents, la ligne  $h = 0$  n'a plus qu'une seule branche; si tous deux sont positifs cette ligne est impossible, comme il suit de (17). Si le point  $h = g = 0$  remplit, comparativement avec le point  $h = k = 0$ , les conditions indiquées, on doit le considérer comme le point de croisement consécutif, et il faut étudier d'abord la ligne  $g = 0$ , et ensuite la ligne  $h = 0$ . Et si, entre les deux points de croisement considérés, la ligne  $h = 0$  est coupée deux ou quatre fois par la ligne  $m = 0$ , on peut n'en tenir aucun compte. Car la ligne  $m = 0$  ne peut être coupée plus d'une fois par aucune des autres lignes  $g = 0$ ,  $k = 0$ ,  $l = 0$  ou  $n = 0$ . Une branche de cette ligne, qui entre dans le champ de  $f$  et le quitte à des points de la ligne  $h = 0$ , où  $g$ ,  $k$ ,  $l$ ,  $n$  sont négatifs, ne peut, par conséquent, entre les deux points d'intersection, être coupée par aucune de ces quatre lignes; seule, par conséquent, ou à l'aide de l'autre branche, elle ne découpera du champ admis de  $f$  qu'un fragment qui, sur sa limite, ne contient pas de points de croisement, et dont, par conséquent, on peut ne pas tenir compte. Si, par cette portion de la ligne  $h = 0$ , entrent deux branches de la ligne  $m = 0$ , qui coupent aussi d'autres lignes limites, on peut se figurer les points d'intersection des deux lignes rapprochés jusqu'à ce qu'ils se touchent l'un l'autre, puis les portions situées d'un côté de la ligne  $h = 0$  réunies ensemble et détachées de la ligne  $h = 0$ , sans qu'il y ait un changement essentiel apporté au groupement des champs; seulement, les deux champs séparés seront réunis; quant au champ intermédiaire qui les séparerait, il sera lui-même partagé en deux.

Mais si, avec le point  $h = k = 0$ , sur la même branche de la ligne

$h = 0$ , il n'y a pas de point de croisement, pour lequel  $f$  est réduite, cette ligne se terminera par un point de fissure et aussi il n'importera pas qu'elle soit coupée une ou trois fois par la ligne  $m = 0$ . La continuation de la limite du champ de  $f$  est donc donnée par une portion de la ligne  $m = 0$ . Si cette ligne ne porte aucun point de croisement, elle ne fait que réunir deux branches de la ligne  $h = 0$ , que l'on peut alors traiter comme si elles étaient réunies. Mais, si cette branche porte un point de croisement, on peut partir de ce point comme du point  $h = k = 0$ . Il ne se présente de difficulté que lorsqu'il y a deux branches de la ligne  $h = 0$  et deux de la ligne  $m = 0$ , dont chacune n'a qu'un point de croisement; car alors on peut se demander comment les dernières s'apparient avec les premières. On pourrait obtenir une réponse en considérant les lignes  $\xi = 0$  et  $\zeta = 0$ , ou  $H = 0$ , déjà indiquées, et passant entre les deux branches de la ligne  $h = 0$ , en considérant spécialement les points d'intersection de ces lignes, avec la ligne  $m = 0$ , desquels, s'ils étaient réels, resterait à décider sur quelles branches de la ligne  $m = 0$  ils se trouvent. Suivant que, dans un pareil point,  $f$  est réduite ou non, il est situé ou non entre le point de croisement et le point de fissure de la branche respective de la ligne  $m = 0$ . Mais, comme à la forme  $f$  il faut toujours appliquer la même substitution, pour obtenir la forme  $f'$  du champ séparé du sien, par la ligne  $h = 0$ , la forme  $f'$  a deux champs distincts, quand les limites sont des portions des branches de la ligne  $h = 0$ . Si l'on se figure les deux points de fissure en question amenés à coïncider, les deux branches de la ligne  $h = 0$  réunies entre elles, ainsi que les deux branches de la ligne  $m = 0$ , puis la première détachée de la seconde, les deux champs séparés de la forme  $f'$  se trouvent réunis; mais le champ de la forme  $f$  est partagé en deux, tandis que rien n'est changé aux autres lignes limites. On peut donc, toutes les fois qu'il y a précisément deux points de croisement sur  $h = 0$ , procéder simplement comme s'ils appartenaient à la même branche de cette ligne. Quand on aura obtenu tous les points de croisement du champ ou des champs d'une forme, il faut que de soi-même la dernière ligne limite se rattache à la première.

Au lieu de déterminer toutes les lignes limites par rapport aux

champs, on peut aussi déterminer tous les champs adjacents par rapport aux lignes limites. Évidemment, d'après le procédé susdit, toute ligne limite commence et finit à un point de fissure et passe par un ou plusieurs points de croisement. Une ligne  $h = 0$  ne peut aller à l'infini par un nombre illimité de points de croisement que si  $h$  et un des nombres  $g, k, l, n$  sont égaux à zéro.

La division, en champs, de la nappe de l'hyperboloïde, aurait aussi pu se baser sur la réduction des formes  $\mathcal{L}$  au lieu de se baser sur la réduction des formes  $f$ . Les points de croisement des deux divisions coïncident; sur d'autres points, les lignes limites des deux systèmes ne peuvent se couper. Des parties de chaque champ d'un système peuvent appartenir aux champs de trois formes de l'autre système. Si l'on a trouvé la division d'un système, celle de l'autre s'offre d'elle-même : chacune des six lignes limites partant d'un point de croisement dans l'un des systèmes est située entre deux des six de l'autre. Quelques lignes limites du deuxième système, que l'on pourrait appeler *système adjoint*, sont marquées (fig. 1) comme lignes serpentineuses dans une intention qui sera expliquée ultérieurement : c'est pour le même motif que quelques lignes ordinaires ont été mises en relief.

Nous avons vu que celles des formes binaires, par lesquelles on peut rationnellement représenter le nombre zéro et dont l'invariant est conséquemment un carré négatif, si les coefficients sont rationnels, se distinguent des autres en ce que, chez les premières, sur la branche hyperbolique, les intervalles de certaines formes s'étendent à l'infini, mais non chez les dernières. De même les formes ternaires, qui représentent rationnellement zéro, et pour le critérium desquelles je renvoie aux *Disquisitiones arithmeticae*, art. 299, se distinguent des autres en ce que, chez les premières, les champs de certaines formes s'étendent à l'infini, mais non chez les dernières. Comme dans ces dernières aucun des nombres  $a, b, c, d$  ne peut devenir infiniment petit, aucun non plus ne doit acquérir une grandeur infinie, les conditions de réduction étant maintenues. Il ne peut y avoir qu'un nombre fini de formes réduites, à nombres entiers, d'un invariant donné; à plus forte raison ne peut-il y avoir qu'un nombre fini d'une classe : c'est ce qui résulte de ce qu'il n'y a qu'un nombre fini de systèmes de valeurs entiers, de  $a, b, c, g, h, k$ , pour lesquels la forme  $f$ , constituée d'après (19) ou au moyen de  $\xi = 0$ , est ré-

duite. On obtient la limitation pour  $a$  et  $A$  par  $0 < aA \leq I$ , puis, quand  $b$  et  $c$  sont négatifs, pour  $b, c, g, h, k$  par les conditions de réduction pour  $(b, g, c)$ ; quand  $b$  et  $c$  ont des signes différents, pour  $b, c, g$  par  $A = bc - g^2$ , pour  $h$  et  $k$  par les conditions de réduction pour  $(b, g, c)$ . Si  $b$  et  $c$  sont positifs,  $B$  et  $C$  sont négatifs, par conséquent  $B, C, G, H, K$  sont limités et par là aussi  $b, c, g, h, k$ .

Si donc on pousse suffisamment loin le développement décrit des champs, on peut, tandis que leur nombre est encore fini, arriver à ce que tout champ à ajouter nouvellement ne soit que la répétition d'un champ déjà existant, de sorte que tout le développement ultérieur n'est qu'une répétition à l'infini de ce qui a déjà été effectué. De plus on n'est pas forcé de dépasser, lors du premier développement, des axes de symétrie, tels que ceux qui ont été définis plus haut. Tout axe de ce genre est évidemment illimité dans ses deux directions, attendu que de la symétrie de ses deux côtés, existant en un endroit, découle d'elle-même la continuation de cette symétrie. Dans l'exemple achevé (*fig. 1*, précitée), toutes les limites du système développé des champs sont de pareils axes de symétrie. Dans cet exemple, il y a une quadruple symétrie à leurs points d'intersection, ce que j'ai voulu indiquer en choisissant des angles droits choisis.

Dans ce qu'on vient de dire, on a montré la possibilité de résoudre tous les problèmes posés dans l'introduction, pour toute forme donnée, comme il est aisé de voir qu'une transformation de  $f$  en elle-même correspond à chaque champ, dont la forme concorde numériquement avec  $f$ , la substitution pouvant être trouvée à l'aide des substitutions consécutives, par lesquelles la forme d'un champ se change en celle d'un champ avoisinant. Il nous reste à parler des simplifications très-considérables qui naissent de la réunion des champs, dans les formes desquels  $a$  et  $A$  sont identiques, par analogie avec la réunion des intervalles en espaces, dans les formes binaires, et à faire ressortir les propriétés générales des résultats.

d. — Réunion des points de croisement en territoires. Développement immédiat de ces territoires.

Si dans un système de valeurs admissible quelconque  $\xi, \eta, \zeta$  peut se présenter le point de croisement  $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} = 0$ , si, par conséquent, la ligne droite (a) peut être perpendiculaire au plan (A), on peut exprimer l'ensemble des lignes droites, qui peuvent devenir perpendiculaires au plan (A), par  $[f(1, \alpha_1, \alpha_2)]$  ou  $(a) + \alpha_1(b) + \alpha_2(c)$ , quand  $\alpha_1, \alpha_2$  désignent les nombres entiers, au moyen desquels  $f(1, \alpha_1, \alpha_2)$  obtient le signe de  $\Delta$  et ne donne pas avec A un produit dépassant l'invariant I, ce qui serait possible si A avait une valeur négative. Si l'on fait partir du point initial de la ligne (a) toutes les lignes  $(a) + \alpha_1(b) + \alpha_2(c)$ , déterminées comme fonctions de  $\xi, \eta, \zeta$  aussi quant à leur longueur, si l'on fait, par conséquent, partir les lignes  $\alpha_1(b) + \alpha_2(c)$  du point final de la ligne (a), alors les points finaux de toutes ces lignes se trouveront dans un plan (A) et, si  $\Delta > 0$ , dans l'intérieur d'une certaine ellipse; si  $\Delta < 0$ , entre une certaine hyperbole et ses asymptotes, comme le montrent les conditions respectives

$$1 \leq f(1, \alpha_1, \alpha_2) \quad \text{ou} \quad 1 - \frac{I}{A} \leq (b, g, c) \left( \alpha_1 - \frac{K}{A}, \alpha_2 - \frac{H}{A} \right)$$

et

$$-1 \leq f(1, \alpha_1, \alpha_2) \leq \frac{I}{A} \quad \text{ou} \quad \frac{I}{-A} - 1 \leq (b, g, c) \left( \alpha_1 - \frac{K}{A}, \alpha_2 - \frac{H}{A} \right) \leq 0.$$

Je continue d'exclure provisoirement celles des formes par lesquelles zéro peut être représenté. Le système particulier de valeurs des variables  $\xi, \eta, \zeta$ , pour lequel une ligne  $[f(1, \alpha_1, \alpha_2)]$  est perpendiculaire sur (A), par conséquent la position du point de croisement respectif sur la nappe de l'hyperboloïde  $F(\xi, \eta, \zeta) = I$ , est, comme l'indique

l'emploi de la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{vmatrix}$  ou de son adjointe, déterminée

par les équations

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{g}\alpha_1 + \mathfrak{c}\alpha_2 = \mathfrak{k} + \mathfrak{b}\alpha_1 + \mathfrak{g}\alpha_2 = 0 \quad \text{ou} \quad \mathfrak{h} - \mathfrak{A}\alpha_1 = \mathfrak{g} - \mathfrak{A}\alpha_2 = 0.$$

Pour l'élimination de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  des conditions énoncées, on obtient, quand  $A > 0$ ,  $\mathfrak{A}^2 \leq f(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}, \mathfrak{H})$  ou, au moyen de l'équation (18)  $\mathfrak{A}^2 \leq AI$ , par conséquent  $2\Xi^2 \leq A + \sqrt{AI}$ ; mais, si  $A < 0$ ,  $\mathfrak{A}^2 \leq -AI \leq \frac{I}{A} \mathfrak{A}^2$ , par conséquent  $A + \sqrt{-AI} \geq 2\Xi^2 \geq 0$ . Tous ces points de croisement sont donc situés, dans le premier cas, sur un fragment fini de la nappe hyperboloïdale, séparé par un plan et borné par une ellipse; dans le second cas, sur un fragment infini de la nappe hyperboloïdale, renfermé entre deux plans et limité par deux branches d'hyperboles. Leur nombre est, dans le premier cas, évidemment fini; mais, dans le deuxième cas, infiniment grand, de telle sorte qu'un nombre fini de valeurs numériques  $f(t, \alpha_1, \alpha_2)$  se répète pour une infinité de systèmes de valeurs  $\alpha_1, \alpha_2$ . On obtient, en effet, un nombre infini de répétitions de la valeur  $a$  elle-même, dont chacune produit aussi une répétition des autres

valeurs, quand on applique à  $f$  d'abord des substitutions  $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$  au déterminant 1, par lesquelles  $(b, g, c)$  se change en  $\pm(b, g, c)$ ,

puis des substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta & 1 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , par lesquelles quand, indépendamment des signes précités  $\pm$ , on pose le nombre  $\varepsilon = \pm 1$ , les nombres

$\pm \varepsilon h$  et  $\pm \varepsilon k$  se mettent à la place de  $h$  et  $k$  et, par conséquent,  $\varepsilon H$  et  $\varepsilon K$  à la place de  $H$  et  $K$ . Si  $s$  est le plus grand commun diviseur de  $b, g, c$  et  $s\tau$  celui de  $b, 2g, c$ , si nous avons  $t^2 + \frac{A}{s^2}u^2 = \pm \tau^2$  et

si  $\beta_1 = \frac{t}{s} - \frac{gu}{s\tau}$ ,  $\gamma_1 = \frac{-cu}{s\tau}$ ,  $\beta_2 = \frac{bu}{s\tau}$ ,  $\gamma_2 = \frac{t}{s} + \frac{gu}{s\tau}$ , les équations

$\varepsilon K = -H\gamma_1 + K\gamma_2 - A\beta$ ,  $\varepsilon H = H\beta_1 - K\beta_2 - A\gamma$ , fournies par l'ap-

plication à  $F$  de la substitution  $\begin{vmatrix} \pm 1 & \mp \beta & \mp \gamma \\ 0 & \pm \gamma_1 & \mp \beta_2 \\ 0 & \mp \gamma_1 & \pm \beta_1 \end{vmatrix}$ , donnent

$$A\beta = K \left( \frac{t}{s} - \varepsilon \right) - \frac{Ahu}{s\tau}; \quad A\gamma = H \left( \frac{t}{s} - \varepsilon \right) + \frac{Ahu}{s\tau}$$

Quand  $s = 1$  et qu'on emploie le signe supérieur, quand, par conséquent, on a  $(t - \tau) | t + \tau \equiv 0 \pmod{A}$ , les côtés droits de ces équations-là sont toujours divisibles par  $A$  pour l'une des deux valeurs de  $\varepsilon$ ,

quand  $A$  est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier impair; en outre, il en est de même, quel que soit le signe employé.

quand  $\frac{t}{\sigma} + \frac{u\sqrt{-A}}{\sigma}$  est le carré d'une expression semblable. Quand  $s$  a des valeurs plus grandes, il dépend des valeurs de  $h$  et  $k$ ; la  $s$ ème puissance d'une expression semblable doit être  $\frac{t}{\sigma} + \frac{u\sqrt{-A}}{s\sigma}$ , pour que cette divisibilité ait lieu pareillement. A cela suffisent en tout cas les carrés de ces puissances qui sont  $= \frac{T}{\sigma} + \frac{U}{\sigma} \sqrt{-A}$  quand  $T^2 + AU^2 = \pm \sigma^2$ .

Pour les points de croisement discutés, j'emploierai désormais, quand leur nombre sera plus grand que 1, et que  $A_1 = F(\lambda, \mu, \nu)$  sera la valeur spéciale de  $A$ , l'expression : *ils sont situés sur le territoire de*  $A = A_1$  ou  $A = F(\lambda, \mu, \nu)$ . *Le point lui-même*  $h = k = 0$ , *auquel correspond une position de*  $(a_1) = [f(a, \alpha_1, \alpha_2)]$ , *perpendiculaire sur*  $(\mathfrak{A}_1)$ , *je l'appellerai le point*  $\frac{a_1}{A_1}$ , *en quoi, si besoin est, on peut remplacer*  $a_1$  *et*  $A_1$  *par*  $f(a, \alpha_1, \alpha_2)$  *et*  $F(\lambda, \mu, \nu)$ . De même que les

points  $\frac{f(1, \alpha_1, \alpha_2)}{A}$  correspondent aux points extrêmes des droites  $\alpha_1(b) + \alpha_2(c)$  partant du même point initial situé dans le plan  $(\mathfrak{A})$ , de même ce qui correspond aux lignes droites  $(b)$ ,  $(c)$  ou en général  $p(b) + q(c)$  ou  $[(b, g, c)(p, q)]$ , qui réunissent ces points, et pour lesquels relativement  $\alpha_2, \alpha_1$ , ou généralement  $p\alpha_2 - q\alpha_1$  sont constants, ce sont, sur la nappe hyperboloïdale, les lignes réunissant les

points  $\frac{f(1, \alpha_1, \alpha_2)}{A}$ , sur lesquelles, relativement,  $\frac{h_j}{\mathfrak{A}}, \frac{h_i}{\mathfrak{A}}, \frac{p h_j - q h_i}{\mathfrak{A}}$  sont constants, ou, exprimé par les coefficients de formes appropriées  $\mathfrak{F}$ , les quantités  $\mathfrak{H}', \mathfrak{K}', p\mathfrak{H}' - q\mathfrak{K}'$  sont égales à zéro; ces lignes ne se coupent qu'en un seul point ou ne se coupent point du tout, comme les droites correspondantes. Si, dans le cas  $A > 0$ , aucun des points  $\frac{f(1, \alpha_1, \alpha_2)}{A}$  n'est plus situé d'un côté d'une pareille ligne, tandis

qu'elle-même passe par deux ou un plus grand nombre de ces points, je l'appelle *une frontière du territoire* de  $A$ ; les deux extrêmes des points situés sur elle, je les nomme *sommets d'angles du territoire*; les points qui ne sont situés sur aucune frontière, je les dis *situés*



dans l'intérieur du territoire. Parmi les lignes  $\frac{p\lambda - q\mu}{\lambda} = \text{const.}$ , que nous venons d'étudier, se trouvent des lignes limites, précédemment étudiées. de champs dans lesquels sont réduites des différentes formes  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{F}'$ , ..., savoir, des lignes limites, le long desquelles ( $\mathcal{A}$ ) est perpendiculaire sur un autre plan, et qui sont coupées, sur deux points au moins, par d'autres lignes pareilles. Mais ces lignes-là, particulièrement aussi les frontières des territoires de coefficients  $A$  positifs, ne se trouvent pas nécessairement parmi ces lignes limites-là, dont seulement trois à la fois passent par les points de croisement à étudier, et qui, si toutefois elles coïncident avec celles-là, peuvent aussi se terminer à des points de fissure, avant d'atteindre ces points de croisement. Dans l'exemple de la *fig.* 1, toutes les frontières, à l'exception d'une, des territoires de coefficients positifs  $A$ , coïncident avec des lignes limites de la catégorie précitée, et on les a inscrites comme lignes serpentantes. Seule, la ligne limite avec laquelle, si l'on désigne  $\begin{pmatrix} 2, & -1, & -9 \\ 1, & -5, & -1 \end{pmatrix}$  par  $f$ , devrait coïncider la frontière du territoire de  $A = 8 = F(1, 0, 0)$ , conduisant du point  $\frac{2}{8}$ , à désigner par  $\frac{f(1, 0, 0)}{A}$ , au point  $\frac{3}{8}$ , à désigner par  $\frac{f(1, 0, -1)}{A}$ , part bien du premier point, mais n'atteint pas l'autre; j'ai marqué, en conséquence, une ligne limite existante, qui relie le point  $\frac{2}{8}$  au point  $\frac{6}{8}$ , le second situé sur la frontière suivante, attendu que je tenais simplement à désigner d'une manière quelconque la connexion des points qui appartiennent à des territoires de coefficients positifs  $A$ , et que je ne voulais plus introduire aucune ligne étrangère aux deux modes de division des champs. Si l'on observe que, dans la *fig.* 1, les six lignes limites externes sont des axes de symétrie bipartite et leurs six points d'intersection des centres de symétrie quadripartite; si l'on s'imagine, d'après cela, la figure agrandie, on obtient une vue d'ensemble de toutes les frontières des territoires occurants de coefficients positifs  $A$ , savoir, abstraction faite de ceux qui se bornent à des lignes et de celui qui a déjà été mentionné, des territoires de  $A = 12$ .

$A = 8 = \begin{pmatrix} 8, & -12, & -15, \\ 0, & 0, & 12, \end{pmatrix} (1, 0, 0)$  et  $A = 5$ .



Tout ce qui a été dit ici, pour A et a, F et f, a son analogue complète pour a et A, f et F. C'est aussi sur quoi je fonde la désignation analogue d'un territoire de  $a = a_1$ , ou  $a = f(x_1, x_2)$ . Ce territoire embrasse, sur la nappe hyperboloïdale, les points de croisement  $\frac{a_1}{F_1(1, \mu, \nu)}$  pour toutes les valeurs possibles de  $\mu, \nu$ , savoir les valeurs telles que, sur le plan  $[F_1(1, \mu, \nu)]$ , la droite  $(a_1)$  puisse être perpendiculaire ou qu'on ait  $1 \leq a_1 F_1(1, \mu, \nu) \leq l$ . Dans le cas  $a > 0$ , ces points, pour lesquels ici l'expression indiquée aussi ne doit être employée que si leur nombre est plus grand que l'unité, sont situés dans l'intérieur de l'ellipse  $2\xi^2 = a + \sqrt{al}$ , et leur nombre est fini; dans le cas  $a < 0$ , ils sont situés entre deux branches d'hyperboles  $\xi = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{-al}}{2}}$ , et leur nombre est infini.

Sur les lignes qui relient les points pris un à un,  $\frac{rh - sk}{a}$  est constant,  $rh' - sk' = 0$ . Ces lignes, particulièrement les frontières des territoires de coefficients positifs  $a$ , coïncident éventuellement, mais non nécessairement, avec les lignes limites des champs, dans lesquels différentes formes  $f, f', \dots$  sont réduites. Dans la fig. 1, toutes ces frontières, à l'exception de deux, coïncident avec de pareilles lignes et ont été différenciées d'avec les autres lignes limites par des traits renforcés. Mais, dans le territoire de  $a = 2$ , il est vrai qu'un fragment de

la frontière, qui relie le sommet d'angle  $\frac{2}{8} = \frac{2}{\begin{pmatrix} 8, -40, -3 \\ 0, -6, -20 \end{pmatrix} | 1, 0, 0}$

au sommet d'angle  $\frac{2}{8} = \frac{2}{\begin{pmatrix} 8, -40, -3 \\ 0, -6, -20 \end{pmatrix} | 1, -1, 0}$  situé sur le com-

plément à ajouter en haut à gauche, coïncide avec les lignes limites  $h = 0$  des champs des formes  $\begin{pmatrix} 2, -1, -12 \\ 2, -4, -1 \end{pmatrix}$  qui se trouvent dans le dessin et dans le complément précité; mais cette ligne se termine, des deux côtés, à des points de fissure avant d'atteindre les sommets d'angle précités. J'ai donc mieux aimé, d'une manière analogue, comme dans le cas exceptionnel susdit, renforcer la ligne à désigner par  $\frac{h}{a} = -1$ , par rapport à la forme employée  $\begin{pmatrix} 2, -1, -12 \\ 2, -4, -1 \end{pmatrix}$ ,

ligne qui coïncide avec une ligne limite et qui relie les points situés sur les frontières qui suivent, savoir, les points

$$\frac{2}{17} = \frac{2}{\begin{pmatrix} 8, & -40, & -3 \\ 0, & -6, & -20 \end{pmatrix}} (1, 0, -1) \quad \text{et} \quad \frac{2}{17} = \frac{2}{\begin{pmatrix} 8, & -40, & -3 \\ 0, & -6, & -20 \end{pmatrix}} (1, -1, -1)$$

Dans le territoire de  $a = 3 = \begin{pmatrix} 3, & -4, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} (1, 0, 0)$ , la frontière  $\frac{h+k}{a} = -1$ , qui relie les points  $\frac{3}{5}$  et  $\frac{3}{8}$ , ne coïncide avec aucune ligne limite; j'ai renforcé, à sa place, une autre ligne limite qui relie ces points. Outre les territoires qui se bornent à des lignes et ceux qui ont déjà été mentionnés, nous trouvons (*fig. 1*) encore un territoire d'un coefficient positif  $a$ , savoir, celui de

$$a = 3 = \begin{pmatrix} 3, & -1, & -6 \\ 1, & -3, & -2 \end{pmatrix} (1, 0, 0).$$

Maintenant, non plus par la division de toute la nappe hyperboloïdale en nombreux petits champs, mais immédiatement, je cherche l'existence et la situation respective des territoires moins nombreux des coefficients positifs  $A$  et  $a$ .

Comme la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & -\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  est adjointe à la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , on obtient  $F(-\alpha_1, 1, 0) < 0$ , et  $F(-\alpha_2, 0, 1) < 0$ , quand on a  $f(1, \alpha_1, \alpha_2) > 0$ ; par conséquent, si  $A > 0$ , nous avons  $F(1, \mp 1, 0) < 0$  pour le signe supérieur, ou pour le signe inférieur, ou pour tous les deux, suivant qu'il existe une valeur entière positive ou une négative, ou une positive et une négative de  $\alpha_1$  qui, jointe à une valeur quelconque, même fractionnaire, de  $\alpha_2$ , rend  $f(1, \alpha_1, \alpha_2)$  positif; de même on a  $F(1, 0, \mp 1) < 0$ , suivant qu'il existe une valeur positive ou une négative, ou une valeur positive et une négative de  $\alpha_2$ , laquelle, jointe à une valeur quelconque, même fractionnaire de  $\alpha_1$ , rend positif  $f(1, \alpha_1, \alpha_2)$ .

Si le point  $\frac{a}{A}$  est situé dans l'intérieur du territoire de  $A$ , chaque

fois le troisième de ces six cas a lieu; par conséquent, pour tous les signes,  $F(1, \mp 1, 0)$  et  $F(1, 0, \mp 1)$  sont négatifs, et attendu qu'il en est ensuite de même pour chaque forme équiva-

lente  $F_1$ , résultant de  $F$  par une substitution quelconque  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix}$ ,

il ne peut pas alors y avoir de nombres premiers entre eux, ni par conséquent de nombres entiers quelconques  $\mu, \nu$  différents de zéro qui rendraient positif  $F(1, \mu, \nu)$ ; si donc le point  $\frac{a}{\Lambda}$  est situé dans l'intérieur d'un territoire de  $\Lambda$ , il n'appartient à aucun territoire de  $a$ ; on trouvera de même que, s'il est situé dans l'intérieur d'un territoire de  $a$ , il n'appartient à aucun territoire de  $\Lambda$ .

Si, au contraire, le point  $\frac{a}{\Lambda}$  est situé sur une frontière du territoire

de  $\Lambda$ , il y a des substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ , au moyen desquelles  $f$  se

change en une forme  $f_1$ , de sorte que, si l'on a  $a_1 > 0$  et  $f_1(1, \pm 1, 0) > 0$  pour un des deux signes au moins, il n'y a aucune valeur entière positive de  $a_2$ , ou il n'y a aucune valeur entière négative de  $a_2$  différant toujours de zéro, qui, jointe à une valeur entière quelconque de  $a_1$ , rende  $f_1(1, a_1, a_2)$  positif. Je fais provisoirement une supposition encore plus étroite: c'est qu'il n'y ait aucune valeur entière positive de  $a_2$  différente de zéro, ou qu'il n'y ait aucune valeur entière négative de  $a_2$ , différente de zéro, qui, jointe à une valeur réelle quelconque, entière ou fractionnaire, de  $a_1$ , rende  $f_1(1, a_1, a_2)$  positif, ou, ce qui revient évidemment au même, c'est qu'avec un des deux signes  $f_1(1, a_1, \pm 1)$  ne devienne positif pour aucune valeur réelle, entière ou fractionnaire, de  $a_1$ . Pour abrégér, j'appellerai désormais *supposition U* cette supposition faite pour une frontière d'un territoire de  $\Lambda$ , et pareillement la supposition analogue faite pour une frontière d'un territoire de  $a$ . De celle-là, savoir, de l'absence d'une racine réelle  $a_1$  de l'équation  $f_1(1, a_1, \pm 1) = 0$ , provient maintenant  $F_1(1, 0, \mp 1) > 0$ , et vice versa, et l'analogie existe après la permutation de  $f$  et  $F$ .

Par l'application de la même considération aux points  $\frac{f_1(1, u, 0)}{A_1}$ ,

qui doivent représenter tous les points d'une frontière du territoire de  $A_1$  répondant à l'équation  $\mathfrak{H}_1 = 0$ , tandis que  $u$  admet une série de  $u'$  valeurs entières consécutives renfermant aussi la valeur zéro, on arrive à la conclusion suivante. Si la supposition  $\mathfrak{U}$  est réalisée pour cette frontière, tous ces points appartiennent aussi à des territoires des différents coefficients  $f_i(1, u, 0)$ , dans lesquels sont encore situés les points  $\frac{f_i(1, u, 0)}{F_i(1, 0, \mp 1)}$ , reliés respectivement par les lignes  $k + b, u = 0$  avec les points  $\frac{f_i(1, u, 0)}{A_1}$ , et entre eux par la ligne  $\mathfrak{H}_1 \mp \mathfrak{C}_1 = 0$ , lesquels points évidemment appartiennent tous à un nouveau territoire de  $F_1(1, 0, \mp 1)$ . Si  $F_1(1, 0, -v)$  demeure positif pour une série de  $v'$  valeurs entières  $v$ , se suivant et renfermant aussi la valeur zéro, il y aura évidemment  $u' \cdot v'$  points  $\frac{f_i(1, u, 0)}{F_i(1, 0, -v)}$ , dont chacun appartient à un des  $u'$  territoires des coefficients  $f_i(1, u, 0)$  et à un des  $v'$  territoires des coefficients  $F_i(1, 0, -v)$ .

De  $f_i(1, \pm 1, 0) > 0$  suit non-seulement  $F_i(1, \mp 1, 0) < 0$ , mais, la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -v \\ \pm 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  ayant pour adjointe  $\begin{vmatrix} 1 & \mp 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v & \mp v & 1 \end{vmatrix}$ , nous aurons encore  $F_i(1, \mp 1, v) < 0$  pour toute valeur réelle, entière ou fractionnaire de  $v$ . Les points  $\frac{a_i}{F_i(1, 0, -v)}$  sont donc situés sur une frontière du territoire de  $a_i$ , ou tout ce territoire se borne à cette frontière, suivant que la condition  $f_i(1, \pm 1, 0) > 0$  est réalisée pour un seul des signes ou pour tous les deux à la fois. Car, si  $F_i(1, \mp \mu, v)$  était positif, pour une valeur entière positive quelconque  $\mu$  jointe à une valeur entière quelconque  $v$ , il faudrait aussi que  $F_i(1, \mp 1, v)$  fût  $> 0$ , du moins pour quelque valeur fractionnaire  $v$ . On reconnaît, d'après cela, que, pour les deux valeurs extrêmes de  $u$ , les points  $\frac{f_i(1, u, 0)}{F_i(1, 0, -v)}$  sont situés sur des frontières des territoires des coefficients positifs  $f_i(1, u, 0)$ . On voit aussi que les territoires des coefficients positifs  $f_i(1, u, 0)$  se bornent tous à des lignes, pour toutes les valeurs autres que les deux valeurs extrêmes de  $u$ . Enfin, par analogie, on conclura que, pour les deux valeurs extrêmes de  $v$ ,

les points  $\frac{f_1(1, u, 0)}{F_1(1, 0, -v)}$  sont tous situés sur des frontières des territoires des coefficients positifs  $F_1(1, 0, -v)$ , et que les territoires des coefficients positifs  $F_1(1, 0, -v)$  se bornent à des lignes pour toutes les valeurs autres que les deux valeurs extrêmes de  $v$ .

Supposons que le territoire de  $A_1$ , considéré en premier lieu, ne se réduise pas à une ligne, et soit zéro une des valeurs extrêmes de  $u$ .

Alors du point  $\frac{a_1}{A_1}$  part une seconde frontière du territoire de  $A_1$ , sur laquelle est situé un point  $\frac{f_1(1, \beta_1, \beta_2)}{A_1}$ ,  $\beta_1$  et  $\beta_2$  étant certains nombres premiers entre eux, lequel point peut aussi être désigné par  $\frac{f_2(1, 1, 0)}{A_2}$ ,

si la forme  $f_2$  provient de la forme  $f_1$  par une substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ .

Si la supposition  $\mathfrak{A}$  ne cesse pas d'être remplie pour cette nouvelle frontière, il y aura aussi un point  $\frac{a_2}{F_2(1, 0, \mp 1)}$  qui, appartenant au territoire de  $a = a_1 = a_2$ , n'est pas situé sur la frontière considérée ci-dessus de ce territoire. Donc aussi ce territoire ne se réduit pas à une ligne, ni donc manifestement aucun des quatre territoires de  $a = f_1(1, u, 0)$  et  $\Lambda = F_1(1, 0, -v)$  pour les valeurs extrêmes de  $u$  et  $v$  en tant que la supposition  $\mathfrak{A}$  est remplie. Les quatre frontières considérées de ces quatre territoires forment donc un quadrilatère, tel que ces territoires eux-mêmes, considérés comme des surfaces entourées de leurs frontières, sont situés en dehors du quadrilatère. Si  $u' > 2$ , il y a, dans l'intérieur du quadrilatère,  $u' - 2$  territoires de coefficients  $f_1(1, u, 0)$ . Ces territoires se bornent à des lignes, qui ne peuvent ni se couper l'une l'autre ni couper les frontières des deux autres territoires de coefficients  $f_1(1, u, 0)$ , comme le prouvent les équations de ces lignes  $k_1 + b_1 u = 0$ . Il en est de même, par analogie, quand  $v' > 2$ , des lignes  $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{C}_1 v = 0$ , qui coupent les premières en forme de grille.

Dans l'exemple de la *fig. 1*, on n'a nulle part en même temps  $u' > 2$  et  $v' > 2$ : ainsi ces deux sortes de lignes ne se trouvent jamais simultanément. Pour la détermination de territoires ultérieurs, ceux qui sont situés dans l'intérieur d'un pareil quadrilatère et se réduisent

à des lignes n'ont aucune importance; aussi n'en tiendrai-je plus aucun compte dans les exemples qui viendront plus tard.

Si l'on applique les observations faites aux deux frontières qui se rencontrent aux sommets d'angles de territoires de coefficients positifs  $\Lambda$  et  $a$ , on reconnaît, *en tant que la supposition  $\mathfrak{U}$  se réalise, ce qui suit*: chaque sommet d'angle d'un territoire de  $\Lambda$  est en même temps un sommet d'angle d'un territoire de  $a$  et vice versa. De plus, quand deux frontières dirigées l'une vers l'autre, de territoires de deux coefficients  $a$ , partent des deux sommets d'angle d'une frontière d'un territoire de  $\Lambda$ , elles se terminent aussi en deux sommets d'angles d'une frontière, dirigée vers la précédente, d'un territoire d'un autre coefficient  $\Lambda$ . Dans la fig. 1, la première proposition se réalise de tous points, mais pas la deuxième. En effet, la supposition  $\mathfrak{U}$  ne se réalise pas à la frontière précitée, entre les points  $\frac{2}{8}$  et  $\frac{3}{8}$  qui, en posant  $f_1 = \begin{pmatrix} 2, & -9, & -1 \\ 1, & -1, & -5 \end{pmatrix}$ , peuvent être désignés par  $\frac{f_1(1, 0, 0)}{A_1}$  et  $\frac{f_1(1, -1, 0)}{A_1}$ ; car nous avons  $F_1(1, 0, -1) < 0$ , tandis que  $f_1(1, z_1, z_2)$  ne devient positif pour aucune valeur entière positive de  $z_2$ , jointe à une valeur entière quelconque de  $z_1$ .

Je regarde comme normal le cas où la supposition  $\mathfrak{U}$  se réalise; le cas contraire est pour moi l'exception. En effet, si elle ne se réalise pas dans un territoire de  $\Lambda$  pour une frontière sur laquelle sont situés des points  $\frac{f_1(1, u, 0)}{\Lambda}$ , tandis que nous avons  $f(1, u, 1) \leq -1$  pour toutes les valeurs entières de  $u$ , il faut que la plus grande valeur, dont  $f(1, u, 1)$  est susceptible avec la variabilité continue de  $u$ , soit positive; on a donc  $f\left(1, \frac{g+k}{-b}, 1\right) = a + 2h + c - \frac{(g+k)^2}{b} > \frac{1}{-b}$ ; par contre, attendu que déjà pour la valeur entière la plus rapprochée,  $u_1 = \frac{g+k}{-b} \pm \delta$ , de  $u$ , on a  $f(1, u_1, 1) \leq -1$ , on obtient pour la même expression  $a + 2h + c - \frac{(g+k)^2}{b} \leq -b\delta^2 - 1$ , tandis que  $\delta^2 \geq \frac{1}{4}$ , et que pour  $-b$  des limites sont posées par la condition  $f(1, u, 0) \geq 1$  à prendre pour les valeurs extrêmes de  $u$ .

Quand la supposition  $\mathfrak{U}$  se réalise pour une frontière, le quadrilatère dont nous avons parlé existe et la supposition est par conséquent

réalisée pour les quatre frontières qui le forment. *En tant que la supposition U est valable, la surface de l'hyperboloïde se partage donc en trois genres de parties, savoir d'une part en territoires de A, entourés de certaines frontières, de l'autre en territoires de a et enfin les quadrilatères précités.* Ces fragments de surface s'excluent tous réciproquement et remplissent néanmoins sans lacune toute la surface. Si l'on a développé les territoires à une distance suffisante dans toutes les directions, des territoires déjà vus doivent se répéter et le développement ultérieur peut se ramener au développement antérieur. Il n'est pas nécessaire de changer les formes  $f$ , donnant des points de croisement  $\frac{a}{A}$  de telle sorte que les formes  $f$  soient réduites; car, leur observation ayant démontré la possibilité de ces développements existant sous la supposition U, on n'a plus du tout besoin d'en tenir compte.

A propos des points de croisement  $\frac{a'}{A}$  dans lesquels  $a'$  et  $A'$  concordent numériquement avec les coefficients  $a$  et  $A$  qui se sont présentés auprès d'un point de croisement antérieur  $\frac{a}{A}$ , je veux aussi décider immédiatement sur l'accord numérique des formes  $f'$  et  $f$  qui me servent de liase; et dans ce but je transforme, ce qui est utile aussi dans le développement de tous les territoires de coefficients A, toutes les formes qui se

présentent, au moyen de substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ , de telle sorte que

$-(b, g, c)$  soit réduit. Pour le développement des territoires de coefficients  $a$ , une transformation passagère, qui réduit  $-(B, G, C)$ , est souvent utile. Il n'est pas nécessaire non plus, en rencontrant successivement chaque frontière d'un territoire de A, de changer, au moyen d'une substitution spéciale, la forme  $f$  en la forme  $f_i$  adoptée plus haut. Car, parce qu'on obtient les expressions  $f_i(1, u, 0)$  et  $F_i(1, 0, -v)$ , correspondant aux  $u', v'$  points de croisement considérés, au moyen

des substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  appliquées en ordre quel-

conque à  $f_i$  ou des substitutions  $\begin{vmatrix} 1 - u & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -v & 0 & 1 \end{vmatrix}$  appliquées



à  $F_1$ , ces expressions, après insertion d'une substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$ , deviennent  $f(1, u\beta_1, u\beta_2)$  et  $F(1, v\beta_2, -v\beta_1)$ .

Je veux développer quelques exemples, dans lesquels, ce qui est aussi le cas le plus fréquent lorsqu'il s'agit d'un petit nombre de territoires numériquement différents, la supposition  $\mathfrak{U}$  se réalise de tous points. Dans les figures, les lignes serpentantes, dont quelques-unes sont rattachées entre elles à des angles et entourent un nombre positif  $A$ , désignent les frontières du territoire de ce coefficient  $A$ ; il en est de même des lignes pleines, des frontières des territoires des coefficients positifs  $a$ ; enfin les lignes ponctuées désignent des axes de symétrie. Sur les frontières, j'ai fait ressortir particulièrement les points  $\frac{f(1, a, 0)}{A_1}$  et  $\frac{a}{F(1, 0, -v)}$ ; de même sur les axes de symétrie les points

$\frac{a}{A}$ , qui y sont situés. Dans la représentation, je pars immédiatement d'une des formes de la classe choisie, d'où naissent le plus simplement les symétries qui se produisent; je pars donc, dans l'exemple de la fig. 2, de la forme  $f = \begin{pmatrix} 1, -2, -2 \\ 1, 0, 1 \end{pmatrix}$ . Le point  $\frac{1}{3} = \frac{f(1, 0, 0)}{A}$  appartient, avec les points  $\frac{1}{3} = \frac{f(1, 1, 0)}{A}$  et  $\frac{1}{3} = \frac{f(1, 1, 1)}{A}$ , à un territoire de

$A = 3$ . Comme  $f$  se change en elle-même par les substitutions correspondantes  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ , ou quand le déterminant doit

être égal à 1 par les substitutions  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ , on

reconnaît déjà une symétrie tripartite et même une symétrie sextipartite, chacune des trois frontières symétriques étant de nouveau symétrique vers ses deux extrémités. Comme la forme adjointe

$F = \begin{pmatrix} 3, -2, -3 \\ -1, 1, 2 \end{pmatrix}$  donne une valeur positive pour  $F(1, 0, 1)$  et de même pour  $F(1, 1, -1)$ , ce qu'on reconnaît déjà d'après la symétrie trouvée, la supposition  $\mathfrak{U}$  est réalisée pour les deux frontières partant du point

$\frac{f(1, 0, 0)}{F(1, 0, 0)}$ . Comme de  $F$ , par chacune des deux substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$



et  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ , provient la forme  $\begin{pmatrix} 2, & -2, & -3 \\ -1, & -2, & 1 \end{pmatrix}$ , qui se change en elle-même

par la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , on reconnaît que le territoire de

$a = 1 = f(1, 0, 0)$ , outre l'axe de symétrie passant par le point

$\frac{1}{F(1, 0, 0)}$ , est encore coupé par un autre axe semblable qui coupe le

premier dans un centre de symétrie quadripartite, au point de croise-

ment  $\frac{1}{F(1, 1, 0)}$ . Ce territoire a donc six angles, savoir : dans la sé-

rie où sont reliés les uns aux autres, par des frontières, les

points  $\frac{1}{F(1, 0, 0)}$ ,  $\frac{1}{F(1, 0, 1)}$ ,  $\frac{1}{F(1, 1, 1)}$ ,  $\frac{1}{F(1, 2, 0)}$ ,  $\frac{1}{F(1, 2, -1)}$ ,  $\frac{1}{F(1, 1, -1)}$ .

Des quadrilatères qui se rattachent aux frontières du territoire de

$A = 3$ , on connaît déjà les quatre angles, d'après les symétries connues,

par exemple, outre les deux sommets d'angles  $\frac{f(1, 0, 0)}{F(1, 0, 0)}$  et  $\frac{f(1, 1, 0)}{F(1, 0, 0)}$ ,

les sommets d'angles symétriques de même l'un à l'autre  $\frac{f(1, 0, 0)}{F(1, 0, 1)}$

et  $\frac{f(1, 1, 0)}{F(1, 0, 1)}$ . On reconnaît que la supposition  $\mathfrak{U}$  est aussi réalisée par

les frontières, n'appartenant pas à ce quadrilatère et sortant de ces

nouveaux sommets d'angles. C'est ce que l'on voit en considérant, par

exemple, la forme  $\begin{pmatrix} 1, & -2, & -1 \\ 0, & -1, & 1 \end{pmatrix}$ , provenue de  $f$  par la substitution

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , et qui, ainsi que nous l'avons déjà vu, mène par la sub-

stitution ultérieure  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  au sommet d'angle suivant  $\frac{1}{F(1, 1, 1)}$

du territoire de  $a = f(1, 0, 0)$ . Cette forme donne aussi par la sub-

stitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  une forme à premier coefficient positif. Cette

nouvelle forme  $\begin{pmatrix} 2, & -2, & -1 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$  donne un nouvel axe de symétrie, et l'on

est ainsi parvenu au terme des considérations numériques nécessaires.

Comme lors de la coïncidence de deux formes, les champs, les ter-

ritoires, les frontières et les angles doivent coïncider, on reconnaît ce que la *fig. 2* représente. Les six points d'intersection des six axes indiqués, de symétrie, sont des centres de symétrie quadripartite, ce qui doit être indiqué par les angles droits choisis, comme dans d'autres exemples, une symétrie de  $\lambda$  parties est indiquée par les angles de  $\frac{4}{\lambda}$  droits. Si l'on se figure le dessin tellement ployé que deux axes pareils, perpendiculaires l'un à l'autre, deviennent des lignes droites, on n'aura pas de peine à s'imaginer la quadruplication de la figure, et l'on peut effectuer la même chose toutes les fois que deux axes se coupent et sont situés à la limite de la figure agrandie. Je n'ai pas voulu faire usage de la symétrie sextuple, qui a lieu autour du centre de la figure, pour la réduire, afin de faciliter la vue d'ensemble. Pour deux autres exemples, les *fig. 3* et *4* pourront suffire seules; j'y ajoute aux points externes  $\frac{a}{A}$ , leur dénomination ou les formes  $\begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix}$  donnant  $h = k = 0$ . L'indication de  $A$ , et  $a$ , n'est alors plus nécessaire.

Quant aux lieux où la supposition **U** n'est pas réalisée, je pourrais renvoyer simplement à la méthode primitive de la division en champs; mais, même en passant par-dessus ceux-ci, on peut continuer le développement suivant le mode abrégé et purement arithmétique employé en dernier lieu. Cependant, sous cette réserve, je vais me résumer et ne poursuivrai pas les cas d'exception les plus rares. Si  $a$  et  $A$  sont positifs et en admettant que le point  $\frac{a}{A}$  soit un sommet d'angle du territoire de  $A$ , d'où sort sa frontière contenant les points  $\frac{f(1, u, 0)}{A}$  pour  $0 \leq u \leq u'$ , tandis qu'il n'y a pas, dans le territoire, de points  $\frac{f(1, \alpha_1, \alpha_2)}{A}$ , à valeur négative de  $\alpha_2$ , jointe à une valeur quelconque de  $\alpha_1$ ; en admettant de plus que  $F(1, 0, 1) < 0$ , de sorte que la supposition **U** ne se réalise pas pour cette frontière, le quadrilatère précité, devant se rattacher à la frontière du côté extérieur, n'existe pas; alors la supposition **U** n'est pas réalisée non plus pour une seconde frontière dirigée vers la première et appartenant au territoire de  $a$ , qui, si toutefois il existe, doit avoir  $\frac{a}{A}$  comme sommet d'angle. Il en est de même d'une troisième

frontière dirigée vers la seconde et appartenant au territoire de  $A'$ , qui, s'il existe, doit avoir pour sommet d'angle le point final de la seconde, et ainsi de suite. Évidemment l'ensemble de toutes ces frontières consécutives de territoires alternatifs de différents coefficients  $A$  et  $a$  donne une limite continue au delà de laquelle, dans une direction, la supposition  $\mathfrak{U}$  ne se réalise pas. Un territoire que l'on étudie peut maintenant aussi dégénérer en une ligne qui doit être regardée comme sa frontière vers ses deux côtés opposés. Il se peut alors que, seulement vers un côté ou, comme dans l'exemple de la *fig. 5*, pour le territoire  $A = 12$ , vers les deux côtés d'une telle ligne, la supposition  $\mathfrak{U}$  ne se réalise pas. Dans le dernier cas, cette ligne constitue, vers les deux côtés, une limite de l'espèce que nous avons précédemment indiquée. On trouve encore une pareille limite, si aucun territoire ne se rattache au point extrême d'une des frontières étudiées; savoir si, comme, par exemple, pour la forme  $\begin{pmatrix} 44, & -45, & -46 \\ -22, & 2, & 1 \end{pmatrix}$  avec l'adjointe  $\begin{pmatrix} 1586, & -2028, & -1981 \\ 970, & 68, & 2 \end{pmatrix}$ , ce point extrême  $\frac{a}{A}$  appartient à un territoire de  $A$ , et que la condition  $F(1, \mu, \nu) > 0$  ne se réalise que pour  $\mu = \nu = 0$ , on poursuit la frontière suivante partant de ce point, du territoire de  $A$ . Avec cette limite continue le cas peut d'abord se présenter où elle rentre en elle-même, de manière que les territoires, auxquels appartiennent les frontières qui la constituent, soient situés en dehors de la ligne fermée. Ce cas se présente dans l'exemple de la *fig. 1*, où les frontières respectives dont l'ensemble ne se montre qu'après le complément à effectuer en haut, du côté gauche, et dont une a déjà été mentionnée, constituent un hexagone formé alternativement de frontières de territoires de coefficients positifs  $A$  et  $a$ . Un cas analogue se présente dans l'exemple tracé *fig. 5*, qui n'a pas besoin d'être expliqué davantage, et dans la *fig. 6*, où toutefois un côté de l'hexagone, une frontière d'un territoire de  $a = 0$ , tombe à une distance infinie. Il est facile de décider, dans les hypothèses admises ci-dessus, laquelle des deux frontières du territoire de  $a$ , issues du point  $\frac{a}{A}$ , et qui contiennent les points  $\frac{a}{F(1, \mu, \nu)}$ , est dirigée vers la frontière contenant les points  $\frac{f(1, a, 0)}{A}$  du territoire de  $A$ . Car le rapport  $\frac{\mu}{\nu}$  des deux nom-

bres nécessairement positifs  $\mu, \nu$ , qui serait égal à zéro pour la frontière cherchée, si la supposition  $\mathfrak{U}$  était remplie, doit être le plus petit possible, si la supposition  $\mathfrak{U}$  n'est pas remplie. Comme le fragment de surface enfermé dans la limite rentrant en elle-même, hexagone dans les exemples cités, peut aussi bien être négligé que le quadrilatère précité, dans le cas de la supposition  $\mathfrak{U}$ , on voit que le cas étudié ne présente aucun obstacle dans le développement ultérieur des territoires. Deuxièmement, la limite mentionnée peut maintenant aussi s'étendre des deux côtés, à l'infini, de sorte que des formes concordant numériquement reviennent auprès de la limite, d'une manière périodique. Pour ce cas, j'allègue les formes  $\begin{pmatrix} 2r & -2r & 2r-s \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ , dans lesquelles, si  $4r < s < \frac{9}{2}r$ , il n'y a que

les substitutions alternatives  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  qui puissent

alternativement amener de nouvelles valeurs positives à la place de  $a$  et  $A$ . Troisièmement, cette limite peut rentrer en elle-même, de telle sorte qu'elle enferme les territoires, pour lesquels la supposition  $\mathfrak{U}$  est réalisée. Il est possible encore qu'on n'obtienne qu'un seul et unique territoire, se réduisant même à une ligne; enfin, il peut y avoir même des points détachés  $\frac{a}{A}$  de nature à faire que  $f(1, \alpha_1, \alpha_2)$  ne soit positif que pour  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , et que  $F(1, \mu, \nu)$  ne soit positif que pour  $\mu = \nu = 0$ , de quoi la forme  $\begin{pmatrix} 44 & -47 & -47 \\ 20 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  avec l'adjointe  $\begin{pmatrix} 1809 & -2069 & -2069 \\ -879 & 67 & 67 \end{pmatrix}$  peut servir d'exemple.

Si  $\frac{f(1, \alpha, 0)}{A}$  sont les points d'une frontière d'un territoire de  $A$ , auquel n'appartiennent des points  $\frac{f(1, \alpha_1, \alpha_2)}{A}$  pour aucune valeur négative de  $\alpha_2$ , jointe à une valeur quelconque de  $\alpha_1$ , et si la supposition  $\mathfrak{U}$  ne se réalise pas pour celle-ci, si donc on a  $F(1, 0, 1) < 0$ , on pourra continuer le développement au delà de cette frontière en appliquant à  $F$  une des substitutions à trouver selon II,  $b$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \nu & 0 & \nu_2 \end{vmatrix}$$

au déterminant 1, qui donnent  $F(\lambda, 0, \nu) \geq 1$ ,  $F(\lambda_2, 0, \nu_2) \leq -1$ , savoir celle qui possède les plus petits coefficients, et fait  $f(\nu_2, \alpha_1, -\lambda_2)$

positif pour quelque valeur entière de  $\alpha_1$ . J'appelle  $F'$  la forme qui provient ainsi de  $F$ . Si, pour arriver au but projeté, qui sera, le plus souvent, atteint dès le premier pas, des coefficients plus petits  $\lambda$ ,  $\nu$ ,  $\lambda_2$ ,  $\nu_2$  ne suffisaient pas, en tous cas les plus petits qu'on pourra trouver suffiront, d'après ce qu'on a vu plus haut pour les territoires des

coefficients négatifs  $\Lambda$ , et qui, à l'aide de la substitution 
$$\begin{vmatrix} \nu_2 & 0 & -\nu \\ \alpha_1 & 1 & \gamma_1 \\ -\lambda_2 & 0 & \lambda \end{vmatrix},$$

changent la forme  $\begin{pmatrix} a, b, c \\ g, h, k \end{pmatrix}$  en la forme  $\begin{pmatrix} a, b, c \\ \varepsilon g, h, \varepsilon k \end{pmatrix}$ . Je passe sur la diminution qu'on peut obtenir lorsque le signe inférieur est possible.

La série des substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , desquelles se

compose la substitution  $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \nu & 0 & \nu_2 \end{vmatrix}$ , se termine par la substitution

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ; parce que celle-ci peut seule changer les nombres  $\nu_2$ ,  $\lambda_2$  qui

apparaissent dans  $f(\nu_2, \alpha_1, -\lambda_2)$  et que les conditions pour  $F(\lambda, 0, \nu)$  et  $F(\lambda_2, 0, \nu_2)$  sont réalisées après chacune de ces substitutions. Il en résulte qu'on obtient  $F'(1, 0, -1) < 0$  et  $f'(1, u, \nu) < 0$  pour toutes les valeurs positives entières de  $\nu$ , jointes à des valeurs entières de  $u$ ; car, si  $\nu$  n'est pas plus grand que le nombre  $p$  des substitutions

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , qui ont été ajoutées finalement, cela provient de ce que

les conditions auraient d'ailleurs déjà été réalisées par des valeurs plus petites de  $p$ ; mais, quand  $\nu > p$ , la même circonstance résulte de

ce que la substitution  $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \nu & 0 & \nu_2 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\nu \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , appliquée à  $F$ , donnerait alors un troisième coefficient positif. Si il y a au moins deux points

$\frac{f'(1, u, 0)}{F'(1, 0, 0)}$ , ces points appartiennent donc de nouveau à une frontière, pour laquelle la supposition  $\mathfrak{A}$  ne se réalise pas; on a donc de nouveau une limite de l'espèce précitée. S'il y avait encore d'autres territoires insérés entre cette frontière et la frontière primitive contenant les

points  $\frac{f_{(1, u, 0)}}{A}$ , ce qu'on peut décider de la manière la plus simple par l'étude des champs qui apparaissent sur la ligne  $\eta = 0$ , on aurait déjà pu trouver une limite plus rapprochée, en insérant des substitutions aux endroits convenables, lesquelles substitutions auraient aussi amené d'autres coefficients à la place de  $b$ . Je m'abstiens d'examiner plus en détail ce cas, ainsi que celui dans lequel, excepté pour  $u = 0$ , il n'y a pas de point  $\frac{f'_{(1, u, 0)}}{F_{(1, 0, 0)}}$ , lequel cas d'ailleurs, le plus souvent, n'établit pas de différence essentielle avec l'autre, et je renvoie à la méthode générale fondée sur la division en champs.

Soit maintenant que la nouvelle limite, dans tout son parcours, fasse vis-à-vis à l'ancienne, soit que d'autres frontières qui la composent aient pour vis-à-vis des frontières d'autres limites, frontières à trouver de la même manière, on pourra toujours développer les groupes de territoires, séparés les uns des autres comme par des fleuves, mais aussi pouvant être réunis, en cas de besoin, comme par des ponts, assez au loin pour que toutes les formes nouvelles concordent numériquement avec des formes qui s'étaient déjà présentées.

*e. — Les transformations des formes en elles-mêmes.*

Outre les substitutions déjà étudiées, IV, *b*, lesquelles, pour une forme réduite  $f$ , ne sont possibles que lorsque leur champ coïncide avec lui-même, après une permutation entre  $a, b, c, d$  ou avec un champ immédiatement contigu, *il existe encore une infinité de substitutions par lesquelles  $f$  se transforme en elle-même, chaque nouveau champ, pour lequel est réduite une forme concordant numériquement avec  $f$ , déterminant une nouvelle substitution semblable, qui correspond en quelque sorte à une ligne reliant le champ primitif au nouveau champ, ou, si au lieu des champs on ne considère que des points de croisement analogues, à une ligne qui relie les deux points de croisement. Comme toute la nappe hyperboloidale est couverte sans lacune par les figures qui ont été expliquées et dessinées, IV, *c* et *d*, et que l'on doit répéter à l'infini, une ligne, reliant un coin d'une pareille figure à sa répétition, peut être formée par les lignes limites de cette figure et leurs répétitions à prendre dans la série et la direction con-*

venables. La *substitution* correspondante peut donc être composée de *substitutions de l'espèce étudiée*, IV, *b*, qui correspondent à la permutation de limites analogues de champs ou au franchissement d'axes de symétrie et des *substitutions en nombre limité* P, Q, R, S, ..., qui répondent aux lignes limites externes de la figure, et dont l'une au moins, puisque ces lignes limites forment un polygone, peut être exprimée par les autres.

Ici se poserait géométriquement la question de savoir comment cette ligne de communication peut être composée du plus petit nombre des fragments précités, à propos de quoi il faudrait ou bien traiter de la même manière les fragments hétérogènes, ou bien procéder de manière qu'avant tout les fragments d'une même catégorie figurent au plus petit nombre possible, puis de même ceux d'une deuxième catégorie... A cette question géométrique répond exactement celle de rechercher comment les substitutions à étudier se composent des substitutions P, Q, R, S, etc. Toutefois, comme non-seulement l'espèce des symétries possibles, mais encore le nombre des substitutions P, Q, R, S, ... varient suivant les différentes classes, il n'est pas aisé d'établir d'une manière tout à fait générale l'expression désirable qui donne précisément une fois chacune des substitutions possibles que l'on cherche, tandis qu'il n'y a aucune difficulté à l'établir dans chaque cas donné.

Je veux donc obtenir cette expression seulement pour les exemples

traités jusqu'ici. Soit (*fig. 1*), désignée par P, la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

composée des substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , au moyen de

laquelle la forme  $f = \begin{pmatrix} 12, & -1, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$  se change en  $f_1 = \begin{pmatrix} 3, & -4, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ , et qui correspond à la ligne limite placée en bas à droite, laquelle relie

le point  $\frac{12}{5} = \frac{a}{A}$  au point  $\frac{3}{20} = \frac{a_1}{A_1}$ . Désignons par Q la substitution

$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , qui

conduit du point extrême inférieur au point extrême supérieur de la



ligne limite extrême de droite, point à désigner, si  $f' = \begin{pmatrix} 3, -1, -20 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ , par  $\frac{3}{20} = \frac{a'}{\Lambda'}$ . La ligne limite externe, conduisant du point  $\frac{3}{20} = \frac{a'}{\Lambda'}$  vers la gauche, laquelle ne se termine pas à un point saillant, je me la figure, portée encore une fois, après qu'elle a franchi l'axe de symétrie, par lequel elle est coupée, conformément à la symétrie admise, et

je désigne par R la substitution  $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ , composée des substitutions

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

qui mène du point  $\frac{3}{20} = \frac{a'}{\Lambda'}$  à sa répétition  $\frac{3}{20} = \frac{f'(4, 0, 3)}{F_1(4, 0, -5)}$ . Je me figure de même doublée la ligne limite externe conduisant du point

$\frac{3}{20} = \frac{a'}{\Lambda'}$  vers la gauche, et je désigne par S la substitution  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

composée des substitutions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et

qui conduit du point  $\frac{3}{20} = \frac{a'}{\Lambda'}$  à sa répétition, le point  $\frac{3}{20} = \frac{f'(2, 3, 0)}{F'(2, -1, 0)}$ .

La figure quadruplée, conformément à la symétrie quadruple qui apparaît autour du point d'intersection des deux lignes limites encore restantes, est maintenant bornée seulement par quatre espèces de lignes, correspondant aux quatre substitutions P, Q, R et S, et que je désigne aussi par les lettres P, Q, R et S. Le long de la ligne limite de cette figure quadruplée, on arrive, en partant du point  $\frac{12}{5} = \frac{a}{\Lambda}$ , au point diamétralement opposé au moyen de la substitution

$\begin{vmatrix} 29 & -5 & -15 \\ 60 & -11 & -30 \\ 36 & -6 & -19 \end{vmatrix}$ , qui répond au parcours aussi bien d'un groupe que

de l'autre, de six fragments de limites qui y conduisent. Et par conséquent, je remarque qu'en désignant  $P.R.P^{-1} = \begin{vmatrix} -13 & 3 & 5 \\ -36 & 8 & 15 \\ -12 & 3 & 4 \end{vmatrix}$



par T et  $Q.S.Q^{-1} = \begin{vmatrix} -17 & 2 & 10 \\ -24 & 2 & 15 \\ -24 & 3 & 11 \end{vmatrix}$  par U, on aura  $T.U = U.T$ .

Si l'on se figure la ligne P prolongée par delà son point final, en produisant la figure précédente, conformément à la symétrie qui se reproduit à la ligne R, il faudra commencer par employer la substitution

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ , au moyen de laquelle la forme  $\begin{pmatrix} 3, & -4, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ ,

en vertu de cette symétrie, se change en elle-même. La substitution  $P^{-1}$  mène ensuite à la répétition prochaine du point  $\frac{12}{5}$ , de sorte que pour la forme  $f$  on obtient la substitution réciproque

$\begin{vmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -24 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ , par laquelle elle se change en elle-même. Si l'on

veut aussi franchir le dernier point final, on a encore, conformément à la symétrie qui se produit à la ligne Q, à ajouter la substitution

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ , de sorte qu'on obtient au total la substitution  $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 24 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ,

par laquelle  $f$  se transforme en elle-même : c'est exactement celle à laquelle aurait conduit l'emploi des prescriptions de II,  $b$  pour la forme  $(12, 0, -1)$ ; je la désigne par V. Si l'on continue d'avancer sur la ligne P, il se manifeste nécessairement une concordance parfaite avec ce qui a été trouvé antérieurement, il part notamment du point

$\frac{12}{5} = F \begin{pmatrix} 7, & 24, & 0 \\ 7, & -2, & 0 \end{pmatrix}$ , de même que du point  $\frac{12}{5} = \frac{a}{\lambda}$ , une ligne Q, se dirigeant vers le même côté de la ligne P, et, après qu'on a employé la

substitution  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  correspondant à la transition de la ligne P,

semblablement une ligne Q se dirigeant vers l'autre côté. Tout ce qui a été dit de P s'applique par analogie à Q. Je désigne par W la substitution

$Q. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. Q^{-1}. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

On doit maintenant se figurer non-seulement les lignes primitives P et Q prolongées de part et d'autre, à l'infini, mais encore, pareillement, les lignes en nombre infini Q et P qui les croisent, puis celles

en nombre doublement infini qui croisent les dernières, etc., de telle sorte qu'on obtient un système de lignes semblable en quelque façon à un arbre ramifié en l'air et dans la terre. De plus, on doit se figurer qu'en un nombre infini de places séparées, tant sur le tronc que sur les branches, il passe toujours deux nouveaux rameaux dans des directions opposées, et qu'aucun rameau ne se trouve en contact avec un autre, excepté celui d'où il émane et ceux qui émanent de lui. La comparaison n'est défectueuse qu'en ce que chez moi tout doit être situé sur une surface correspondant à une des nappes hyperboloïdales et en ce que les rameaux devraient être de deux espèces différentes, en sorte que ceux d'une espèce ne produiraient que ceux de l'autre; comme de toutes parts la ramification doit être poursuivie à l'infini, on peut faire coïncider chaque fragment d'une espèce avec chaque fragment de la même espèce au moyen de déformations appropriées. De chaque point du système à chaque autre il n'y a qu'un seul et même chemin. Ainsi, de chaque point, par exemple, de  $\frac{12}{5} = \frac{a}{A}$  à chaque autre  $\frac{12}{6}$  de ce système, il n'y a qu'une seule et même substitution, abstraction faite des changements admissibles de signes de colonnes tout entières, changements correspondant à la transition des lignes. Cette substitution est contenue dans l'expression générale  $V^{v_0}.W^{w_0}.V^{v_1}.W^{w_1} \dots V^{v_n}.W^{w_n}$ , que je veux désigner par E, et dans laquelle les exposants peuvent être des nombres entiers, positifs ou négatifs quelconques;  $v_0$  et  $w_n$  peuvent aussi être zéro. E n'est nullement l'expression la plus générale de toutes les substitutions, par lesquelles  $f$  se change en elle-même, car de tous les centres des fragments de l'espèce V se dirigent, vers les deux côtés de ces fragments, des lignes R, qui mènent à des centres analogues de fragments de l'espèce V appartenant à de semblables systèmes de lignes; pareillement se dirigent des centres de tous les fragments de l'espèce W, vers les deux côtés de ces fragments, des lignes S, qui mènent à des centres analogues de fragments de l'espèce W appartenant à de semblables systèmes de lignes. Tous les nouveaux systèmes de lignes ainsi introduits ne sont en contact ni avec les systèmes primitifs ni avec eux-mêmes. Aussi les lignes R et S, partant à leur tour des points correspondants de ces systèmes, ne relient pas immédiatement

deux de ces systèmes de lignes, mais mènent vers de nouveaux et semblables systèmes de lignes, non cependant tous distincts, comme le montre l'étude du dodécagone, formé de lignes P, Q, R et S. On peut se faire une idée de toute cette configuration, si l'on se dit que le système de lignes considéré en premier lieu ne forme nulle part des polygones fermés, mais divise seulement la surface en un nombre infini de bandes s'étendant à l'infini. Dans le développement suivant naissent dans chacune de ces bandes de tels nouveaux systèmes de lignes, en nombre infini, nécessairement courbés convenablement, que je veux désigner par  $L_h$ , savoir un pour chaque fragment, ou V ou W de la délimitation de la bande, suivant que l'indice  $h$  est ou pair ou impair. Les bandes, en nombre infini, que chacun des nouveaux systèmes, de lignes  $L_h$  sépare d'avec la bande qu'on vient d'observer, doivent comme on voit facilement, être, à leur tour, traitées comme celle-ci, et ainsi de suite. Ce même rôle de la délimitation complète d'une pareille bande est joué par la ligne limite extrême d'un système de lignes  $L_h$ , laquelle, par la courbure admissible de toute la configuration, pourrait être changée en une délimitation semblable. Du nombre infini des systèmes de lignes, compris par cette limite, nous n'avons jusqu'ici considéré qu'un seul, le système primitif. Le suivant, d'un côté, coïncide avec un système appartenant, d'une manière analogue, à  $L_{h+1}$ ; et, de l'autre côté, le suivant coïncide avec un système appartenant, d'une manière analogue, à  $L_{h-1}$ .

Si l'on désigne par  $\Gamma$  et  $\Delta$  les substitutions

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

et si l'on remplace l'un des nombres  $t$  et  $u$  par 1, l'autre ainsi que  $\gamma$  et  $\delta$  indifféremment par zéro ou 1, de la combinaison d'un nombre indéfini de substitutions E.  $\Gamma$ .  $\Delta$ .  $T$ .  $U^n$  résulte une expression qui comprend en elle toutes les transformations de la forme  $\begin{pmatrix} 12, & -1, & -5 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$  en elle-même et chacune seulement une fois, les substitutions E étant supposées

différentes de  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ .

Pour traiter, de la manière la plus semblable possible, l'exemple de la *fig. 5*, je considère la forme  $\begin{pmatrix} 1, -2, -15 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ ; je désigne par Q la substitution

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , qui mène du point  $\frac{1}{30}$  au point  $\frac{2}{15}$ , par R la substitution

$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 15 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ , réciproque, correspondant à la ligne limite

extrême placée à gauche et doublée, ligne menant du même point  $\frac{1}{30}$  par-dessus le point  $\frac{1}{12}$ , en franchissant l'axe de symétrie supérieur de gauche à sa répétition  $\frac{1}{30}$ ; je désigne par S la substitution

$\begin{vmatrix} -11 & 0 & 30 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 11 \end{vmatrix}$ , correspondant à la ligne limite extrême placée à droite et

redoublée, tandis que la ligne désignée plus haut par P disparaît: alors

T devient égal à R,  $U = Q.S.Q^{-1} = \begin{vmatrix} -21 & 20 & 60 \\ -10 & 9 & 30 \\ -4 & 4 & 11 \end{vmatrix}$  et l'on obtient de nouveau  $T.U = U.T$ . Je fais encore

$$Q. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}. Q^{-1}. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = W;$$

alors, à la place du système précédent E de substitutions, se met simplement  $W^w$ ; à la place du système correspondant de lignes se met simplement une ligne allant de part et d'autre à l'infini. Du reste, il en est de même que plus haut, sauf que la substitution désignée par T disparaît.

Pour traiter la *fig. 3* avec la plus grande analogie possible, je me l'imagine quadruplée autour du point  $\frac{1}{3}$ . Le long de la ligne limite inférieure et redoublée, la forme  $\begin{pmatrix} 11, -1, -1 \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$  se change alors en elle-même à l'aide de la substitution réciproque

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -10 & 5 & 0 \\ -33 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = R.$$

La ligne limite primitive extrême de gauche mène d'un centre de

symétrie octuple, du point  $\frac{1}{T}$ , à un centre de symétrie sextuple, qui n'est pas un point  $\frac{a}{A}$ , sans qu'il en résulte plus de difficultés que dans les cas précédents. Il est un point de fissure  $k = n = 0$  du champ de la forme  $\left(3, \begin{smallmatrix} -2, & -2 \\ 1, & 1, & 0 \end{smallmatrix}\right)$ , se changeant en elle-même à l'aide des substitu-

tions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ . A cette ligne limite correspond

la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , ou, si l'on ajoute encore la

substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ , pour obtenir la forme énoncée, celle-ci :

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ , que je désigne par Q. A la transition de la ligne limite

supérieure, dans la figure dessinée, au passage dans le deuxième

sextant correspond alors la substitution  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ . Du point primi-

mitif  $\frac{11}{1}$ , on arrive maintenant à sa répétition diamétralement opposée,

située dans la figure quadruplée, par deux voies auxquelles correspondent de nouveau les substitutions identiques l'une à l'autre T.U

et U.T, si je mets de nouveau

$$R = T \quad \text{et} \quad Q \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot Q^{-1} = \begin{vmatrix} -12 & 3 & 2 \\ -33 & 8 & 6 \\ -22 & 6 & 3 \end{vmatrix} = U.$$

Dans le système de lignes analogue à celui qui a été désigné jusqu'ici par E entre pareillement, comme dans l'exemple précédent, une simple et unique ligne, la ligne Q. Mais elle se dirige de chaque

point  $\frac{11}{1}$  en quatre sens et du point de fissure ainsi que de ses répétitions en trois sens; il en résulte qu'en désignant par  $\Sigma, \Gamma, \Delta$  et  $\Lambda$  les substitu-

tions  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ ,  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ , et

posant  $\sigma = 1$  ou  $2$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $\lambda$  égaux à  $0$  ou  $1$ , il se produit évidemment une substitution E, par la combinaison de différentes substitutions formées comme  $\Gamma\gamma\Delta^{\delta}\Lambda^{\lambda}Q\Sigma^{\sigma}Q^{-1}$  et l'addition finale d'une autre substitution  $\Gamma\gamma\Delta^{\delta}\Lambda^{\lambda}$ . Ici encore, comme dans le premier exemple, ce système de lignes a une propriété telle que, dùt-on prolonger à l'infini la ramification, les différentes branches ne se rencontreront plus jamais. Dans les bandes infiniment nombreuses, qui résultent de la division de la surface par ce système, se retrouvent de nouveaux systèmes semblables, une ligne R partant de chaque point  $\frac{11}{1}$  dans chacune des quatre bandes contiguës à ce point. Mais, comme le montre la figure quadruplée, étudiée ci-dessus, en face de toute la délimitation d'une pareille bande ne se trouvent que les lignes extrêmes d'un seul et même autre système de cette espèce. De même que plus haut, l'ensemble de ces lignes extrêmes peut être considéré aussi lui-même comme formant la délimitation d'une pareille bande. Une expression, qui donne toutes les transformations de la forme  $\begin{pmatrix} 11, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$  en elle-même, est donc en tout cas celle-ci :  $E_1.R.E_2.R.E_3.R \dots$ , qui, par la propriété  $T.U = U.T$ , peut encore être amenée à un tel état qu'elle ne donne chaque substitution qu'une fois. Cela résulte de ce que, dans une substitution E, les derniers facteurs étant  $\Lambda Q \Sigma Q^{-1}$ , et donnant par conséquent ensemble U, on peut faire avancer devant eux le facteur R.

Avec la forme  $\begin{pmatrix} 3, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$  (fig. 4), outre les substitutions  $\Gamma$ ,  $\Delta$  et  $\Lambda$  correspondant à son octuple symétrie, une seule substitution, réciproque, répondant à la ligne limite extrême de droite redoublée, la substitution

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

suffit à donner une expression générale des transformations en elle-même de cette forme. Cette expression, qui résulte simplement de la combinaison de différentes substitutions  $\Gamma\gamma\Delta^{\delta}\Lambda^{\lambda}T$ , peut être mise sous une telle forme qu'elle ne donne qu'une fois chaque substi-

tution. On y parvient par l'emploi de la proposition indiquée par la symétrie à douze parties au point  $\frac{1}{3}$ , savoir, que la sextuple ré-

pétition de la substitution  $T.\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$  donne l'identité. Si

l'on voulait comparer le système de lignes actuel formé par les lignes T, dont quatre à la fois viennent aboutir à un même point, aux systèmes de lignes E étudiés dans les exemples posés jusqu'ici, on verrait donc ici les rameaux en contact en formant des hexagones.

Il y a évidemment, pour chaque forme  $\begin{pmatrix} a, b, c \\ 0, 0, 0 \end{pmatrix}$ , des substitutions pareilles à celles qui ont été désignées jusqu'ici par E. Un exemple d'une classe dans laquelle ne se produit aucune forme semblable est celui dont il est question (*fig. 2*). Je désigne maintenant par  $f$

la forme  $\begin{pmatrix} 2, -2, -1 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}$  résultant, par la substitution  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ ,

de la forme  $\begin{pmatrix} 1, -2, -2 \\ 1, 0, 1 \end{pmatrix}$  désignée plus haut par  $f$  et je cherche

ses transformations en elle-même. La substitution  $R = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

mène du point  $\frac{2}{2} = \frac{f(1, 0, 0)}{F(1, 0, 0)}$  à un point symétrique  $\frac{2}{2} = \frac{f(1, 1, 0)}{F(1, 0, 0)}$ ,

situé au delà d'un axe de symétrie non dessiné, et, pour aller de celui-ci au point  $\frac{2}{2}$  suivant, sur le contour dessiné de la figure, on emploie la substitution

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

La figure montre que la substitution R.S, après avoir été employée trois fois, donne l'identité. Si l'on désigne par  $\Delta$  et  $\Phi$  les substitu-

tions  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ , qui correspondent à la transi-

tion des deux espèces d'axes de symétrie dessinés, si l'on met  $\delta$  et  $\varphi$  égaux à 0 ou 1, et si l'on fait toutes les dispositions possibles des

substitutions R, S,  $\Delta^{\delta}$ ,  $\Phi^{\gamma}$ , on obtient de la sorte une expression pour toutes les transformations de la forme  $f$  en elle-même.

Les relations

$$R\Delta = \Delta R, \quad S\Phi = \Phi S, \quad \Delta\Phi = \Phi\Delta, \quad R^2 = S^2 = \Delta^2 = \Phi^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

montrent qu'on peut avancer la substitution  $\Delta$  de droite à gauche toujours assez loin pour qu'elle vienne s'arrêter immédiatement après S; de même la substitution  $\Phi$ , pour qu'elle vienne s'arrêter immédiatement après R, de sorte que l'expression entière ne contient plus, outre le facteur initial  $\Delta^{\delta}\Phi^{\gamma}$ , que des puissances positives de

$$R\Phi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad S\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

parmi lesquelles peuvent encore être réparties des connexions de R et S seules, mais seulement R avant S $\Delta$ , puis S et RS avant R $\Phi$ . En effet, à cause de la relation

$$(RS)^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

toutes les connexions de R et S peuvent d'ailleurs être supprimées, sauf RS, SR, RSR.

Ces exemples suffiront pour montrer la variété qui se manifeste, même dans les formes les plus simples, variété qui, pour le moment, me fait apparaître comme impossible l'établissement d'une formule valable pour toutes les formes à la fois, ce qui ne veut pas dire que je nie la possibilité d'une certaine classification, qui sera cependant beaucoup plus compliquée que la classification analogue pour les formes positives.

Dans les articles déjà cités de M. Hermite, qui découvrit la réduction continuelle, se trouve énoncée dans la proposition I, p. 312 (t. 47 du *Journal de Crelle*), que, si la forme  $f$  se change en elle-même, par

$$\text{la substitution } S = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \text{l'équation } \begin{vmatrix} x-t & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1-t & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2-t \end{vmatrix} = 0$$

possède une racine  $t_1 = 1$ , on, ce qui revient au même, que la somme des éléments de la diagonale principale de la matrice donnée  $\alpha + \beta_1 + \gamma_2$  est égale à la somme analogue formée d'éléments de la matrice de la substitution adjointe, ou qu'on a  $t = 1$  dans un des trois systèmes de



nombres  $\lambda, \mu, \nu, t$ , qui donnent identiquement

$$\lambda x + \mu y + \nu z = t(\lambda x' + \mu y' + \nu z').$$

(voir Cayley, t. 50, p. 291, et Bachmann, t. 76, p. 335 du même journal). En effet, si  $f$  se transforme par la substitution S en  $f'$ , identique à  $f$ , il y a, dans les champs de F et F', deux points, que je distingue par les indices 1 et 2, et qui sont déterminés par des valeurs

$$\begin{aligned} \Xi_1 = \Xi_2 = \alpha \Xi'_1 + \beta \Pi'_1 + \gamma Z'_1, \quad \Pi_1 = \Pi_2 = \alpha_1 \Xi'_1 + \beta_1 \Pi'_1 + \gamma_1 Z'_1, \\ Z_1 = Z_2 = \alpha_2 \Xi'_1 + \beta_2 \Pi'_1 + \gamma_2 Z'_1, \end{aligned}$$

à rapports rationnels entre elles. L'équation de la ligne  $\begin{vmatrix} \Xi & \Pi & Z \\ \Xi_1 & \Pi_1 & Z_1 \\ \Xi_2 & \Pi_2 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$  réunissant ces deux points, je la dénote par  $\lambda \Xi + \mu \Pi + \nu Z = 0$ . Soient  $F_\rho$  et  $F'_\rho$  des formes provenant de F et F' par une substitution dont la dernière colonne est  $\begin{vmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{vmatrix}$ ; alors  $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$  est la dernière colonne de la substitution qui correspond à ladite ligne, et par laquelle  $\mathcal{F}_\rho$ , formée au moyen de  $\Xi_2, \Pi_2, Z_2$ , se change en  $\mathcal{F}'_\rho$  formée au moyen de  $\Xi'_2, \Pi'_2, Z'_2$ , par laquelle donc  $F_\rho$  se change en  $F'_\rho$ . Donc 001 est la dernière ligne de la substitution par laquelle  $f_\rho$  se change en  $f'_\rho$ , et l'on a

$$\lambda x + \mu y + \nu z = z_\rho = z'_\rho = \lambda x' + \mu y' + \nu z'.$$

Quant aux deux autres valeurs admissibles  $t_2$  et  $t_3$  de  $t$ , réciproques l'une à l'autre, qui font identiquement  $\lambda x + \mu y + \nu z = t(\lambda x' + \mu y' + \nu z')$ , il faut, comme le dit la proposition II de M. Hermite, si

$$S^n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \text{ et que } n \text{ soit le plus petit nombre de cette propriété,}$$

qu'elles soient des racines primitives  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité. Toutefois 6 peut être aussi la valeur de  $n$ , comme le montre mon développement à la fin de IV b, et l'exemple mentionné de la forme  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

On peut constater, même sans ces développements, que  $n$  n'a pas d'autres valeurs possibles que 1, 2, 3, 4, 6. En effet, tandis que, d'après l'équation  $t^2 + (1 - \alpha - \beta_1 - \gamma_2)t + 1 = 0$ , valable pour  $t_2$  et  $t_3$ ,

les valeurs  $-1, 0, 1, 2, 3$  de  $z + \beta_1 + \gamma_2$  donnent pour  $t_2$  et  $t_3$  des racines primitives respectivement  $2^{\text{es}}, 3^{\text{es}}, 4^{\text{es}}, 6^{\text{es}}, 1^{\text{re}}$  de l'unité, dans toutes les autres valeurs entières de cette somme,  $t_2$  et  $t_3$  deviennent réels et aussi différents de  $\pm 1$ . M. Hermite avait évidemment l'intention d'exclure de ses autres recherches ces substitutions, appartenant aux différents nombres  $n$ , qui sont analogues aux simples racines de l'unité, se produisant dans les transformations semblables des formes divisibles en facteurs linéaires, ou, ce qui revient au même, dans les unités complexes. Car, dans le cas  $n = 2$ , ou  $t_2 = t_3 = -1$ , les équations (5) (page 309, t. 47 du *Journal de Crelle*) ne seraient pas les plus générales satisfaisant à l'équation (4), parce qu'alors est égal à zéro le déterminant du système de coefficients, au moyen duquel, d'après ma désignation,  $x + x', y + y', z + z'$  sont exprimés par  $x', y', z'$ ; alors ne serait non plus valable la proposition (page 324) que T.U ne peut pas être égal à U.T, sans que les deux substitutions soient des puissances d'une seule et même substitution. En ce cas on ne doit pas appliquer non plus la formule donnée par M. Cayley, au passage indiqué (page 293), attendu qu'alors les coefficients qui sont désignés là par B et C peuvent aussi rester différents de zéro. Pour  $n = 3, 4, 6$  on peut employer les formules générales, nonobstant que les valeurs de  $t_2$  et  $t_3$  sont alors complexes, et que par conséquent, d'après les expressions données pour elles, page 318, par M. Hermite, la quantité désignée là par  $\gamma$ , et que je désignerais par  $-F(\lambda, \mu, \nu)$ , ne peut alors pas être positive. Au fond les formules de M. Hermite reviennent aux répétitions de la valeur numérique de  $a$  dans des territoires de coefficients négatifs A, tels que je les désigne, répétitions considérées plus haut, et que l'on ne doit pas modifier essentiellement, même pour des formes non réduites. Elles donnent, de la manière la plus facile, les substitutions semblables prises une à une; c'est seulement pour constater leur ensemble et leur dépendance mutuelle que la considération des territoires de coefficients positifs A et  $a$  est utile, à cause de leur propriété de s'exclure mutuellement.

La quantité  $\alpha + \beta_1 + \gamma_2$  a la propriété, quand  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$  est une substitution composée, et que l'on modifie l'ordre de ses composantes,

de rester invariable, attendu qu'elle devient  $\sum_{\rho} \sum_{\sigma} p_{\rho\sigma} \cdot q_{\rho\sigma}$ , quand  $p_{\rho\sigma}$  et  $q_{\rho\sigma}$  sont les éléments des composantes. On peut donc, en quelque sorte, regarder cette grandeur ou une de ses fonctions appropriées, par exemple,  $\frac{x + \beta_1 + \gamma_1 - 1}{2}$  ou le module ou la portion réelle du logarithme de l'une des deux racines de l'équation

$$t^2 - (x + \beta_1 + \gamma_1 - 1)t + 1 = 0,$$

comme échelle du rang d'une substitution, ce qui devient particulièrement simple et naturel, lors de l'exclusion des substitutions, plusieurs fois mentionnées et devant être regardées comme des exceptions, pour lesquelles  $n = 2, 3, 4, 6$ . D'après la proposition précitée, il y a, chaque fois, après le choix de cette échelle, égalité ou une autre relation simple, entre le rang d'une substitution et celui de son inverse ou de son adjointe. Dans ce que l'on vient de dire, on a évidemment déjà résolu le problème d'exprimer toutes les substitutions, par lesquelles  $f$  se transforme en elle-même, au moyen de quelques substitutions indépendantes les unes des autres et ayant le rang absolument le plus petit, et ce problème équivaut, par analogie, au problème de ramener toutes les substitutions semblables, des formes binaires, à la substitution, répondant à une simple période ou à la plus petite solution de l'équation de Pell.

*f* — Des formes par lesquelles on peut rationnellement représenter le nombre zéro.

Dans ces formes, d'où je commence par exclure le cas  $I = 0$ , continue à subsister la définition de formes réduites et la division en champs et en territoires. Seulement si, parmi les nombres  $a, b, c, d$ , zéro lui-même apparaît, s'ajoutent aux valeurs de  $\lambda$  mentionnées en IV  $b$  et aux substitutions correspondantes des substitutions ultérieures, vu qu'alors, des nombres  $g, h, k, l, m, n$ , quatre peuvent devenir égaux à zéro et les champs de pareilles formes réduites peuvent s'étendre à l'infini. Je ne veux plus faire ici de développements particuliers, mais seulement appliquer immédiatement les principes généraux parfaitement suffisants, d'abord à l'exemple de la forme

$\begin{pmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix} = f$ , traité dans les *OEuvres posthumes* de Gauss (t. II, p. 311), seul exemple d'une forme ternaire indéfinie traité jusqu'à présent, qui soit parvenu à ma connaissance. Cet exemple est si simple, que le dessin à tracer, d'après le principe que j'ai utilisé antérieurement, se réduirait à la moitié d'un seul champ. Car le

champ de la forme  $f_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ & -1 & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \\ & & & 0 \end{vmatrix}$ , résultant de  $f$  au moyen de

la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ , est symétrique à lui-même, corres-

pondant à la substitution  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$  et à l'axe  $\eta = \zeta$ , et il est

séparé par chacune de ses trois lignes limites, dont il ne faut considérer qu'une dans son parcours entier, et une autre, dans la moitié de son parcours, d'avec un champ qui lui est symétrique; savoir, il est séparé par le fragment, s'étendant de  $\zeta = 0$  jusqu'à  $\zeta = +\infty$ , de la ligne  $\eta = 0$ , d'avec le champ de la forme qui concorde numériquement avec elle et qui en résulte au moyen de la substitution

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ . Le long du fragment, qui s'étend de  $\eta = 0$ ,

$\zeta = +\infty$  jusqu'à  $\eta = \zeta = \sqrt{\frac{1}{2}}$ , de la ligne  $2\eta\zeta = 1$ , on a  $\eta + \zeta = \xi$  d'après (11) et attendu que  $\xi, \eta, \zeta$  sont positifs. Si, pour répondre au passage de la ligne limite, on met  $\eta + \zeta = \xi + \delta$ , on a

$$2\eta\zeta = 1 + 2\xi\delta + \delta^2, \quad h_1 = 2\eta(\xi - \eta) - 1 = 2(\xi - \eta)\delta + \delta^2, \\ l_1 = -\delta^2, \quad m_1 = 2(\xi - \zeta)\delta + \delta^2.$$

Pour traiter ce cas, qui n'eût pas été possible avec les formes considérées antérieurement, il faut d'abord, conformément à la prescription de

III  $\alpha$ , appliquer la substitution  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ , dans laquelle seulement l'ordre des colonnes est arbitraire et qui, à la place de la somme

$-g_1 - h_1 - k_1 - l_1 - m_1 - n_1$ , amène une somme diminuée de  $h_1$ , qui est le plus grand des nombres  $g_1, h_1, k_1, l_1, m_1, n_1$ , ensuite, parce que le coefficient remplaçant  $k_1$  devient seul positif, il faut appliquer la substitution

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
, par conséquent il faut appliquer en tout à  $f_1$  la substitution

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
. Comme dans la forme résultante, que je

nomme  $f_2$ , on obtient  $g_2 = -\delta^2$ ,  $h_2 = 2(\xi - \zeta)\delta$ ,  $k_2 = -2(\xi - \zeta)\delta$ , d'où l'on peut reconnaître que son champ dégénère en la ligne  $2\zeta\xi = 1$ , on aurait encore à employer des substitutions ultérieures, et tout d'abord une qui change  $h_2$  en  $-h_2$ . Mais on prévoit que, dans le cas présent, qui est celui d'une valeur positive de  $\delta$ , si l'on a mis en

avant la substitution 
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
, on peut employer la même substitution

pour une réduction ultérieure qui, dans le cas d'une valeur négative de  $\delta$ , aurait changé la forme  $f_2$  en la forme  $f_1$ . Nous ferons donc

usage de l'inverse de la précitée, 
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
, qui, attendu que la

forme  $f_2 = \begin{pmatrix} -1, 0, 0 \\ -1, 0, 0 \end{pmatrix}$ , n'a pas été changée numériquement par la

substitution 
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
, produit une forme concordant numériquement avec la forme  $f_1$ , et résultant d'elle, comme on voit, par la substitution

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
. A l'aide des trois substitutions, réciproques à elles-mêmes, qu'on a trouvées, on peut former toutes les substitutions, par lesquelles  $f_1$  se change en elle-même. Si on les fait précéder

de la substitution 
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$
 et suivre par l'inverse, on obtient les substitutions

substitutions

$$S = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad T = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad U = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

au moyen desquelles on peut former toutes les substitutions qui changent en elle-même la forme  $\begin{pmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ . L'expression générale de ces substitutions peut se formuler d'une manière telle qu'elle ne donne chacune qu'une fois, au moyen des relations  $S.U = U.S$ ,  $STST = TSTS$ , valables pour les substitutions  $S, T, U$ , ainsi que pour les trois nommées en premier lieu; ces relations résultent de la symétrie quadruple et octuple, qui se produit à deux points d'intersection des trois axes de symétrie considérés, points situés dans le fini. La symétrie, qui se produit au troisième point situé dans l'infini, a lieu entre une infinité de parties. Il n'est pas difficile de voir que le système de coefficients donné par Gauss

$$W = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 & \frac{1}{2} \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 & \alpha\gamma + \beta\delta \\ \frac{1}{2} \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 & \frac{1}{2} \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2 & \alpha\gamma - \beta\delta \\ \alpha\beta - \gamma\delta & \alpha\beta + \gamma\delta & \alpha\delta - \beta\gamma \end{vmatrix}$$

dans lequel  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$ , et dans lequel ou deux des nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont entiers et pairs, les deux autres entiers et impairs, ou tous les quatre sont des multiples impairs de  $\sqrt{\frac{1}{2}}$ , donne en réalité les transformations de la forme  $\begin{pmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$  en elle-même, à l'exclusion, ce qui va sans dire, de celles qui ont un premier coefficient négatif, et que l'on peut aisément déduire des autres. Car d'abord, si l'on remplace

les nombres  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$  par les nombres  $\begin{vmatrix} 1 & \pm 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  ou  $\begin{vmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \mp \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \pm \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$ ,

le système de coefficients coïncide avec celui de la substitution

$$(STSU)^{\pm 1} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & \pm 2 \\ -2 & -1 & \mp 2 \\ \pm 2 & \pm 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ ou } (ST)^{\pm 1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \mp 1 & 0 \end{vmatrix}, \text{ tandis que,}$$

si l'on fait permuter  $\alpha$  avec  $\delta$ ,  $\beta$  avec  $\gamma$ , de  $W$  résulte le système  $T.W.T$ . A cette relation on pourrait joindre une série de relations semblables, basées sur des changements de signes et sur d'autres permutations entre  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , comme par exemple si, dans  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ ,

on fait permuter les deux lignes horizontales, et si, dans l'une d'elles,

on change les signes,  $W$  se change en  $WSTST = W \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ .

D'un côté, toutes les séries de facteurs  $S, T, U$  peuvent maintenant s'exprimer par les expressions  $STSU, ST$  qu'on fera précéder ou suivre à la fois de  $T$ , abstraction faite d'un facteur  $T$ , qui peut être surabondant au commencement ou à la fin. De l'autre côté, tous les

systèmes  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$  de la première et de la seconde espèce peuvent se

composer à l'aide des systèmes simples  $\begin{vmatrix} 1 & \pm 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & \mp \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \pm \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$ ,

de la manière qu'a lieu la composition des substitutions, de même que la composition de tels systèmes quelconques donnant de nouveau des systèmes semblables; et il est aisé de voir que, lorsqu'un

système  $\begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{vmatrix}$  est égal à  $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}$ , le système correspondant  $W''$  est égal à  $W'W$ .

La fig. 6 suffira pour expliquer un exemple ultérieur, la forme  $\begin{pmatrix} 1, & -1, & -47 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ . Les frontières des territoires de coefficients positifs  $A$  y sont marquées par des lignes pleines renforcées, au lieu de l'être comme auparavant par des lignes serpentantes. Parmi les lignes limites externes, il n'y a que six axes de symétries. Au delà des cinq autres, la continuation est obtenue par la demi-révolution de celles-ci autour des centres de symétries, qui y sont marqués par des croix; le centre situé dans le territoire de  $a = 2$  rentre dans ce qui a été dit III, *b*, 6, les autres sont eux-mêmes points de croisement.

Dans le cas  $I = 0$ , il résulte de  $h = k = 0$ , à cause de  $a\mathfrak{A} = 0$ , que, ou bien  $a = \frac{2}{3} = a = h = k = 0$ , et par conséquent  $f = (b, g, c)$ , ou bien que  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = A = H = K = 0$ . Si, dans le deuxième cas,  $r$  désigne le plus grand commun diviseur de  $h$  et  $k$ ,  $q$  celui de  $b$  et  $c$ , il en résulte que

$$b = \pm q \frac{k^2}{r^2}, \quad c = \pm q \frac{h^2}{r^2}, \quad g = \pm q \frac{hk}{r^2},$$

$$f = ax^2 + 2rx \left( \frac{k}{r} y + \frac{h}{r} z \right) \pm q \left( \frac{k}{r} y + \frac{h}{r} z \right)^2.$$

Dans les deux cas, la forme indéfinie réduite  $f$  devient donc une forme binaire, soit indéfinie, soit négative, de sorte que  $f$  même doit être nommée une forme indéfinie ou une forme non positive. Car, si l'on désigne  $f$  par  $(b, g, c)$ , si  $(b, g, c)$  était une forme binaire positive, les conditions de réduction ne pourraient être remplies par aucune forme positive  $(b, g, c)$ .

Je ne puis finir sans rendre grâce à l'extrême obligeance de M. Hermite, qui a bien voulu prendre la peine de revoir avec le plus grand soin tout le travail précédent [\*].

---

[\*] ERRATA. — Page 21, note, au lieu de XXX, lisez XXXIII. — Page 60, ligne 11, au lieu de : 4, 8, 12, lisez : 4, 8, 24.



*Extrait d'une Lettre à M. Resal;*

PAR M. OSSIAN BONNET.

L'article intéressant sur le mouvement d'un point sur une surface, que vous venez de publier dans votre Journal, me remet en mémoire que je vous avais promis la communication d'une démonstration des formules de Lagrange susceptible d'entrer dans l'enseignement le plus élémentaire pour le cas spécial du mouvement d'un point sur une surface. Voici cette démonstration, qui me paraît à la fois simple et directe.

Je conserverai toutes vos notations, auxquelles j'ajouterai les suivantes :  $p$  et  $q$  seront les deux variables indépendantes au moyen desquelles on aura exprimé les coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  des différents points de la surface. La caractéristique  $D$  indiquera les différentielles totales relatives à un déplacement infiniment petit égal à  $Ds$ , effectué sur la surface et dans une direction entièrement quelconque; la caractéristique  $d$  indiquera les différentielles ordinaires relatives à un déplacement infiniment petit égal à  $ds = vdt$ , effectué sur la surface et tangentiellement à la trajectoire du point mobile, c'est-à-dire les différentielles par rapport à  $t$ ; enfin la caractéristique  $\delta$  indiquera les différentielles relatives à un déplacement infiniment petit égal à  $\delta s$ , effectué sur la surface et normalement à la trajectoire du point mobile. Nous poserons

$$Ds^2 = E. Dp^2 + 2F. Dp Dq + G. Dq^2,$$

$$X. Dx + Y. Dy + Z. Dz = P. Dp + Q. Dq,$$

E, F, G, P, Q étant des fonctions connues de  $p$  et de  $q$ , dont les trois premières dépendent de la forme de la surface, et les deux autres de la grandeur et de la direction de la force qui sollicite le point matériel; par conséquent, on aura

$$ds^2 = E.dp^2 + 2F.dp dq + G.dq^2;$$

par suite

$$v^2 = E\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + 2F\frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} + G\left(\frac{dq}{dt}\right)^2$$

ou

$$v^2 = E p'^2 + 2F p' q' + G q'^2;$$

en faisant

$$\frac{dp}{dt} = p', \quad \frac{dq}{dt} = q',$$

et, en outre,

$$X dx + Y dy + Z dz = P dp + Q dq,$$

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = P \delta p + Q \delta q.$$

Écrivons maintenant les deux équations du mouvement, qui sont indépendantes de la réaction inconnue de la surface, à savoir

$$d\left(\frac{1}{2} v^2\right) = X dx + Y dy + Z dz = P dp + Q dq,$$

$$\frac{v^2}{\rho_g} = X \frac{\delta x}{\delta s} + Y \frac{\delta y}{\delta s} + Z \frac{\delta z}{\delta s} = P \frac{\delta p}{\delta s} + Q \frac{\delta q}{\delta s}.$$

Ces deux équations, où  $\rho_g$  désigne le rayon de courbure géodésique de la trajectoire, sont établies dans votre Mémoire par un calcul un peu long, mais on reconnaît aisément qu'elles résultent immédiatement de l'expression des composantes tangentielle et normale de l'accélération dans le mouvement d'un point libre.

Or, d'après une formule que j'ai donnée pour la première fois dans mon premier Mémoire sur la *Théorie générale des surfaces* (XXXII<sup>e</sup> Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 37), et que

l'on sait maintenant établir bien simplement d'une foule de manières :

$$\frac{1}{v_0} = - \frac{\partial ds}{ds \partial s},$$

on a donc

$$\begin{aligned} d\frac{1}{2}v^2 &= P dp + Q dq, \\ - \frac{v^2 \partial ds}{ds} &= P \partial p + Q \partial q, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant, dans la seconde équation,  $v$  par  $\frac{ds}{dt}$ , puis  $ds \partial ds$  par  $\partial \frac{1}{2} ds^2$ ,

$$(1) \quad \begin{cases} d\frac{1}{2}v^2 = P dp + Q dq, \\ - \frac{1}{dt^2} \partial \frac{1}{2} ds^2 = P \partial p + Q \partial q. \end{cases}$$

Posons, en général,

$$\frac{1}{2} (E \alpha^2 + 2F \alpha \beta + G \beta^2) = \omega,$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des fonctions quelconques de  $p$  et de  $q$ , et différencions successivement suivant la caractéristique  $d$  et suivant la caractéristique  $\partial$ , nous aurons

$$(2) \quad \begin{cases} d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial p} dp + \frac{\partial \omega}{\partial q} dq + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\beta, \\ \partial \omega = \frac{\partial \omega}{\partial p} \partial p + \frac{\partial \omega}{\partial q} \partial q + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \partial \alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \partial \beta, \end{cases}$$

les dérivées partielles  $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial \omega}{\partial \beta}$  étant prises comme si  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $p$  et  $q$ , dont  $E$ ,  $F$ ,  $G$  sont fonctions, étaient quatre variables indépendantes.

Occupons-nous de la première relation

$$(2, 1^o) \quad d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial p} dp + \frac{\partial \omega}{\partial q} dq + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\beta$$

$\omega$  étant une fonction homogène du second degré par rapport à  $\alpha$  et à  $\beta$ , on a

$$\alpha \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 2\omega.$$

d'où

$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} d\beta + \alpha d \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \beta d \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 2d\omega;$$

ajoutant membre à membre cette dernière équation et l'équation (2, 1<sup>o</sup>), réduisant et isolant  $d\omega$ , on a

$$d\omega = \alpha d \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \beta d \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial \omega}{\partial p} dp - \frac{\partial \omega}{\partial q} dq.$$

Supposant enfin que  $\alpha$  soit  $p' = \frac{dp}{dt}$ , et que  $\beta$  soit  $q' = \frac{dq}{dt}$ , auquel cas  $\omega$  est égal à  $\frac{1}{2}v^2$ , il vient

$$d \frac{1}{2}v^2 = dp \left( \frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial p'} - \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial p} \right) + dq \left( \frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial q'} - \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial q} \right),$$

ce qui permet de mettre la première des équations (1) sous la forme

$$dp \left( \frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial p'} - \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial p} - P \right) + dq \left( \frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial q'} - \frac{\partial \frac{1}{2}v^2}{\partial q} - Q \right) = 0.$$

Passons à la deuxième des équations [2]

$$\delta \omega = \frac{\partial \omega}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \omega}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \delta \beta;$$

si l'on y fait  $\alpha = dp$ ,  $\beta = dq$ , ce qui donne  $\omega = \frac{1}{2}ds^2$ , et qu'on la divise par  $dt^2$ , il viendra

$$\frac{\delta \frac{1}{2}ds^2}{dt^2} = \frac{\partial \frac{1}{2}ds^2}{\partial p} \delta p + \frac{\partial \frac{1}{2}ds^2}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \frac{1}{2}ds^2}{\partial p} \delta dp + \frac{\partial \frac{1}{2}ds^2}{\partial q} \delta dq;$$

mais

$$\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial p} = \frac{\partial \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2}}{\partial p} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p}, \quad \frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial q} = \frac{\partial \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2}}{\partial q} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial \frac{dp}{dt}} = \frac{\partial \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2}}{\partial \frac{dp}{dt}} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'}, \quad \frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial \frac{dq}{dt}} = \frac{\partial \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2}}{\partial \frac{dq}{dt}} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'}.$$

les dérivées partielles, dans les valeurs transformées, étant prises comme si  $p, q, p', q'$  étaient des variables indépendantes, puis

$$\frac{\partial dp}{\partial t} = \frac{d \partial p}{dt}, \quad \frac{\partial dq}{\partial t} = \frac{d \partial q}{dt};$$

donc

$$\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial t} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p} \partial p + \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q} \partial q + \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} \frac{d \partial p}{dt} + \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} \frac{d \partial q}{dt};$$

d'autre part,

$$\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} \frac{d \partial p}{dt} = d \left( \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} \frac{\partial p}{dt} \right) - \frac{\partial p}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} \frac{d \partial q}{dt} = d \left( \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} \frac{\partial q}{dt} \right) - \frac{\partial q}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'};$$

enfin, les différentielles indiquées par les caractéristiques  $d$  et  $\delta$  étant relatives à des déplacements rectangulaires effectués sur la surface, on a

$$(E dp + F dq) \partial p + (F dp + G dq) \partial q = 0,$$

ou, en divisant par  $dt^2$ ,

$$(E p' + F q') \frac{\partial p}{dt} + (F p' + G q') \frac{\partial q}{dt} = 0$$

ou

$$\frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} \frac{\partial p}{dt} + \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} \frac{\partial q}{dt} = 0;$$

donc la deuxième des équations (2) revient à

$$\frac{\partial \frac{1}{2} ds^2}{\partial t^2} = \left( \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p} - \frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} \right) \partial p + \left( \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q} - \frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} \right) \partial q,$$

ce qui permet de mettre la deuxième des équations (1) sous la forme

$$\partial p \left( \frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'} - \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p} - P \right) + \partial q \left( \frac{1}{dt} d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'} - \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q} - Q \right) = 0.$$

Ce résultat et celui qui a été obtenu plus haut montrent que

$$\frac{d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p'}}{dt} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial p} + P, \quad \frac{d \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q'}}{dt} = \frac{\partial \frac{1}{2} v^2}{\partial q} + Q.$$

Ce sont les équations de Lagrange; on en déduit, comme on sait, aisément celles de Hamilton.

*Note sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, dans un cas particulier;*

PAR M. C. FLYE SAINTE-MARIE,

Capitaine d'artillerie, Inspecteur des études à l'École Polytechnique.

Soient H, K, L les trois axes principaux d'inertie d'un solide, en un point fixe O, et A, B, C les moments d'inertie du corps, par rapport à ces axes. Soient, à un instant quelconque,  $\omega$  la vitesse de rotation autour de l'axe instantané,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  les composantes de  $\omega$  suivant les axes principaux. Soient enfin P, Q, R les moments, autour des axes H, K, L, des forces agissant sur le solide.

Les formules d'Euler nous donnent

$$A \frac{d\omega_x}{dt} = (B - C) \omega_y \omega_z + P,$$

$$B \frac{d\omega_y}{dt} = (C - A) \omega_z \omega_x + Q,$$

$$C \frac{d\omega_z}{dt} = (A - B) \omega_x \omega_y + R.$$

Soient OM l'axe représentatif de la rotation à un instant donné, et OM' l'axe représentatif à l'instant suivant. Par le point fixe, menons Om parallèle à MM' et égale à  $\frac{MM'}{dt}$ . Cette droite, qui représente ce qu'on peut appeler l'*accélération de rotation*, se projette sur les axes H, K, L, suivant  $\frac{d\omega_x}{dt}, \frac{d\omega_y}{dt}, \frac{d\omega_z}{dt}$ .

Je désignerai par les lettres  $\alpha, \gamma, \varepsilon$  ces trois dérivées, qui sont les coordonnées du point  $m$ , et par les lettres  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus des angles formés par l'axe instantané OM avec les trois axes principaux; d'où  $\omega_x = \omega\alpha, \omega_y = \omega\beta, \omega_z = \omega\gamma$ .

Les formules d'Euler deviennent alors

$$Ax = (B - C) \omega^2 \beta \gamma + P,$$

$$By = (C - A) \omega^2 \gamma z + Q,$$

$$Cz = (A - B) \omega^2 \alpha \beta + R.$$

Je multiplie la première par  $\alpha$ , la deuxième par  $\beta$ , la troisième par  $\gamma$ , et j'ajoute.

Il vient

$$(1) \quad A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = P\alpha + Q\beta + R\gamma$$

De même, en multipliant la première équation par  $A\alpha$ , la deuxième par  $B\beta$ , la troisième par  $C\gamma$  et ajoutant, on obtient pour résultat

$$(2) \quad A^2\alpha x + B^2\beta y + C^2\gamma z = AP\alpha + BQ\beta + CR\gamma.$$

Les équations (1) et (2) représentent chacune un plan contenant le point  $m$ , lequel appartiendra, par conséquent, à la droite représentée par les deux équations.

Par le point M, extrémité de l'axe représentatif de la rotation à un instant quelconque, je fais passer deux ellipsoïdes ayant pour équation :

$$\text{L'un. . . . . } AX^2 + BY^2 + CZ^2 = U \text{ (ellipsoïde d'inertie),}$$

$$\text{L'autre. . . . } A^2X^2 + B^2Y^2 + C^2Z^2 = U'.$$

Au point M, dont les coordonnées sont  $\omega\alpha$ ,  $\omega\beta$ ,  $\omega\gamma$ , les plans tangents aux ellipsoïdes ont pour équation :

$$\text{Le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie. . } A\alpha x + B\beta y + C\gamma z = \frac{U}{\omega},$$

$$\text{Le plan tangent au second ellipsoïde. . . } A^2\alpha x + B^2\beta y + C^2\gamma z = \frac{U'}{\omega}.$$

Ces plans sont parallèles aux deux plans contenant le point  $m$ , et représentés par les équations (1) et (2).

Laisant de côté le cas où les trois moments P, Q, R sont nuls, cas dans lequel la loi du mouvement a été mise en lumière par Poinso, je supposerai seulement que le second membre de l'équation (1) s'annule.



Cette équation représentera alors un plan passant par le point fixe; ce plan contiendra donc la droite  $Om$ . D'ailleurs, il est parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie; donc aussi  $MM'$ , parallèle à  $Om$ , sera parallèle à ce plan tangent. On en déduit que le déplacement élémentaire du point  $M$  se fait sur la surface de l'ellipsoïde et que, par conséquent, ce point reste toujours sur le même ellipsoïde d'inertie.

Or la somme  $Pz + Q\xi + R\gamma$ , que nous avons supposée nulle, n'est autre que le moment des forces autour de l'axe instantané; d'où ce théorème :

*Lorsqu'un corps tourne autour d'un point fixe sous l'action de forces dont le moment autour de l'axe instantané est constamment nul, la vitesse de rotation est proportionnelle au rayon vecteur de l'ellipsoïde dirigé dans le sens de cet axe.*

Réciproquement, cette proportionnalité exige que la somme des moments des forces autour de l'axe instantané soit nulle.

La proposition directe est applicable au mouvement d'un corps tournant autour d'un point fixe, et assujéti à rester en contact avec une surface fixe, sans être soumis à d'autres forces que les réactions normales de la surface.

En effet, lorsqu'un corps tourne autour d'un axe, le travail élémentaire d'une force agissant en un point du corps est égal au moment de la force autour de cet axe, multiplié par le déplacement angulaire élémentaire. Or, si un corps glisse sans frottement sur une surface fixe, le travail élémentaire de la réaction normale est évidemment nul, le point d'application se déplaçant tangentiellement à la surface; il en est donc de même du moment de la réaction autour de l'axe instantané. Il est également évident que, si le corps roule sans glissement, ce moment est encore nul. On est donc dans les conditions du théorème énoncé plus haut.

*Sur le problème des trois corps ;*

PAR M. ÉMILE MATHIEU.

(Extrait d'une Lettre à M. Resal.)

Le *Journal de Mathématiques* contient, dans le tome 1 (année 1875. p. 277-316), un Mémoire de M. Allégret *Sur le problème des trois corps*, dans lequel l'auteur pense avoir abaissé les équations du problème au quatrième ordre; mais la solution qu'il a donnée de cette question est tout à fait inexacte.

Ce Mémoire pourrait donner lieu à plusieurs observations; mais j'arrive tout de suite à la partie (p. 314-315) où se trouverait toute la force de la démonstration relative à l'abaissement du système des équations. L'auteur introduit dans l'expression de la force vive : 1° la vitesse de rotation d'une certaine droite dans le plan P des trois corps, vitesse qu'il représente par  $\frac{d\gamma}{dt}$ ; 2° une rotation du plan P autour du rayon vecteur  $s$  mené de l'origine au corps  $m$ , rotation qu'il représente par  $\frac{d\rho}{dt}$ ; 3° une rotation  $\frac{d\varpi}{dt}$  autour d'une droite située dans le plan P et perpendiculaire à  $s$ . Il remarque ensuite que la force vive  $2T$  renferme  $\frac{d\gamma}{dt}$ ,  $\frac{d\rho}{dt}$ ,  $\frac{d\varpi}{dt}$ , sans contenir  $\gamma$ ,  $\rho$ ,  $\varpi$ , puis il forme les quantités conjuguées des variables  $s$ ,  $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$ ,  $\varpi$ , parmi lesquelles se trouvent celles qui ont pour valeurs

$$\frac{dT}{d\frac{d\rho}{dt}}, \quad \frac{dT}{d\frac{d\varpi}{dt}}, \quad \frac{dT}{d\frac{d\gamma}{dt}},$$

et qu'il représente par  $\rho'$ ,  $\varpi'$ ,  $\gamma'$ . Il prend alors l'équation des forces

vives

$$U - T = H,$$

où  $U$  est la fonction de forces et  $H$  une constante arbitraire; il remplace dans cette équation les quantités conjuguées aux variables  $s, \sigma, \omega, \gamma, \rho, \varpi$  par les dérivées d'une fonction  $S$  par rapport à ces variables, et il forme ainsi l'équation aux différentielles partielles d'Hamilton. Il obtient, d'après cela, pour solution complète de cette équation, l'expression

$$S = C\gamma + F\rho + G\varpi + V,$$

$C, F, G$  étant trois constantes arbitraires et  $V$  une fonction indépendante de  $\gamma, \rho, \varpi$ .

L'erreur consiste à regarder  $d\gamma, d\rho, d\varpi$  comme de véritables différentielles et à introduire les variables  $\gamma, \rho, \varpi$ . En effet, conservant la caractéristique  $d$  pour indiquer les différentiations par rapport au temps  $t$ , représentons, suivant l'usage ordinaire, par la caractéristique  $\delta$  les variations dans un déplacement virtuel; nous pouvons ainsi considérer les quantités  $\delta\gamma, \delta\rho, \delta\varpi$ , mais on n'a pas

$$(a) \quad \delta d\rho = d\delta\rho, \quad \delta d\varpi = d\delta\varpi, \quad \delta d\gamma = d\delta\gamma.$$

Or, si l'on se reporte à la démonstration des équations canoniques de la Dynamique, on verra qu'elle suppose que toutes les variables du problème satisfont à ce genre de conditions; par suite aussi, si ces conditions ne sont pas satisfaites par rapport à toutes les variables, on ne peut pas appliquer l'équation aux différences partielles d'Hamilton.

J'ai dit que les expressions  $d\rho, d\varpi, d\gamma$  ne satisfont pas aux équations (a); on a en effet, en désignant par  $\frac{d\gamma}{dt}$  la vitesse de rotation du rayon  $s$ ,

$$\begin{aligned} \delta d\rho &= d\delta\rho + d\varpi \delta\gamma_1 - d\gamma_1 \delta\varpi, \\ \delta d\varpi &= d\delta\varpi + d\gamma_1 \delta\rho - d\rho \delta\gamma_1, \\ \delta d\gamma_1 &= d\delta\gamma_1 + d\rho \delta\varpi - d\varpi \delta\rho, \end{aligned}$$

comme on peut le reconnaître d'après ce qui se trouve dans la *Mécanique analytique* de Lagrange (t. II, section IX, n° 15).

M. Allégret remarque ensuite que les trois constantes C, F, G représentent les doubles des vitesses aréolaires prises autour de l'origine sur le plan P des trois corps et sur deux plans perpendiculaires à P et perpendiculaires entre eux, dont l'un est mené par le rayon  $s$ . Il trouve en effet, pour ces quantités, les valeurs suivantes :

$$F = \mu\sigma^2 \sin^2 \omega \frac{d\alpha}{dt},$$

$$C = (ms^2 + \mu\sigma^2) \frac{dZ}{dt},$$

$$G = (ms^2 + \mu\sigma^2 \cos^2 \omega) \frac{d\sigma}{dt},$$

$\omega$  étant l'angle compris entre les deux rayons  $s$  et  $\sigma$ .

Le point d'analyse qui précède ayant échappé à l'auteur, ce dernier résultat aurait pu le prévenir qu'il n'était pas en bonne voie. En effet, ces trois équations, qu'il prend pour les intégrales des aires, n'ont plus lieu, parce que les plans qu'il considère sont mobiles et que les intégrales des aires ne doivent avoir lieu que pour des plans fixes. On peut, à la vérité, former encore trois équations équivalentes aux équations des aires par rapport à trois axes mobiles rectangulaires; mais alors il faut procéder ainsi : On considérera l'axe du plan invariable (ou l'axe du moment résultant des quantités de mouvement qui animent le système des corps), qui est constant en grandeur et en direction; on le projettera sur les positions qu'occupent ces trois axes mobiles au commencement d'un instant; on le projettera sur les mêmes positions à la fin de cet instant, et l'on exprimera que les trois dernières projections sont égales respectivement aux trois premières.

*Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes;*

PAR M. MAURICE LEVY.

Les formules que Poisson et Kirchhoff ont déduites des équations générales de la théorie mathématique de l'élasticité, pour représenter la flexion d'une plaque mince, fournissent la même équation aux dérivées partielles du quatrième ordre; mais celles de Poisson comportent trois conditions à la surface et donnent lieu à un problème d'Analyse impossible toutes les fois que les forces agissantes ne sont pas telles que ces trois conditions se réduisent d'elles-mêmes à deux; les formules de Kirchhoff, au contraire, ne comportent que deux conditions à la surface, et donnent lieu à un problème d'Analyse toujours possible et déterminé.

Pour cette raison, la théorie de Kirchhoff est généralement admise, sans que l'on ait pu pourtant découvrir la moindre erreur dans celle de Poisson. M. Boussinesq, dans un Mémoire publié au tome XVI du *Journal de M. Liouville*, lui en attribue une; mais je montre qu'elle n'existe pas; je dis, de plus, que les deux théories, si discordantes en apparence, sont au fond identiques, et que celle si séduisante de Kirchhoff n'est, quoiqu'elle conduise à un problème d'Analyse toujours soluble, applicable que dans les cas très-exceptionnels où celle de Poisson s'applique elle-même, et que, dans ces cas, elles fournissent toutes deux des résultats identiques.

Pour mettre le problème en équation d'une manière générale, au lieu de considérer dès l'abord, comme on l'a fait, une question d'approximation, je traite d'abord un certain nombre de problèmes rigoureux, relatifs à des cylindres de hauteur quelconque; j'arrive à plusieurs résultats en eux-mêmes intéressants, et de nature à élucider beaucoup le problème si obscur des plaques; parmi ces résultats, je

citerai ceux-ci : 1<sup>o</sup> quelles que soient les pressions exercées sur la surface latérale d'un corps cylindrique ou prismatique sur la masse entière et sur les bases duquel n'agissent pas de forces, il est impossible qu'une ligne matérielle, naturellement droite et perpendiculaire sur les deux bases, se transforme, par suite de la déformation élastique, en une courbe algébrique d'un degré supérieur au troisième; 2<sup>o</sup> pour qu'elle puisse se transformer en une courbe algébrique (d'un degré nécessairement égal ou inférieur au troisième), il faut qu'entre la résultante de translation et le moment résultant des pressions agissant le long de chacune des génératrices de la surface latérale il existe une certaine relation.

Une fois obtenus, les résultats rigoureux que nous cherchons relativement à des cylindres de hauteur quelconque, nous les appliquons à des cylindres de hauteur très-petite, c'est-à-dire à des plaques. Cette marche, on le conçoit, est incomparablement plus nette et moins sujette à méprises que celle qui consiste à faire les approximations sur les équations aux dérivées partielles servant de point de départ. C'est d'une façon analogue qu'a opéré M. de Saint-Venant, dans son Mémoire sur la torsion des prismes.

Après avoir mis ainsi le problème en équation, en faisant abstraction des forces telles que la pesanteur agissant sur la masse entière de la plaque, pour introduire ces forces sans reprendre des calculs qui deviendraient extrêmement compliqués, nous employons une méthode qui constitue une sorte d'extension de la méthode de la variation des constantes arbitraires; elle pourrait se nommer la méthode de la variation de la forme des fonctions arbitraires. Elle consiste, en effet, à modifier la forme des diverses fonctions qui entrent dans nos équations, de façon telle que, sans cesser de satisfaire aux conditions sur les bases, lesquelles ne changent pas, elles puissent satisfaire aux nouvelles équations d'équilibre intérieur résultant de l'introduction des forces agissant sur la masse de la plaque et aux nouvelles conditions sur la surface latérale.

Une fois les forces proportionnelles aux masses introduites, le théorème de d'Alembert fournit les équations du mouvement.

Nous appliquons notre théorie à l'équilibre et au mouvement de la plaque circulaire, soit libre, soit appuyée, soit encastrée sur son pourtour. Dans le cas de l'équilibre, nos formules permettent de

calculer en termes finis la flèche au centre de la plaque appuyée ou encastrée, quelle que soit la répartition des forces extérieures; dans le cas du mouvement, le mouvement vibratoire du centre de la plaque ne dépend que des déplacements moyens et des vitesses moyennes sur les circonférences concentriques à la plaque et non des déplacements initiaux et vitesses initiales imprimés à chaque point. Enfin, si l'on suppose tout symétrique autour du centre, nos formules coïncident avec celles de Poisson, qui, dans ce cas particulier, le seul qu'il ait traité, se trouvent satisfaire à toutes les conditions du problème.

### I.

*Sur les difficultés qui subsistent dans la théorie des plaques minces.*

C'est Lagrange qui, le premier, à l'occasion des travaux de M<sup>lle</sup> Sophie Germain, a donné, sans démonstration, l'équation à différences partielles du quatrième ordre dont dépend le problème, et cette équation a été retrouvée depuis, par les moyens les plus divers; elle ne peut pas faire doute, et c'est seulement sur la possibilité de satisfaire aux conditions à la surface, conditions dont Lagrange ne s'est pas occupé, que porte la difficulté.

Kirchhoff, dans son beau Mémoire : *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, publié au tome I. du « Journal de Crelle », et devenu classique en Allemagne, montre facilement que M<sup>lle</sup> Sophie Germain trouve des conditions à la surface, en général incompatibles avec l'équation à différences partielles à satisfaire.

Cela n'a rien de surprenant, les travaux, d'ailleurs remarquables, de M<sup>lle</sup> Sophie Germain étant basés sur une hypothèse que la théorie mathématique de l'élasticité est venue infirmer.

Ce qui est, au contraire, très-inattendu, c'est que Kirchhoff montre aussi que Poisson, qui, dans son Mémoire de 1828, s'appuie pourtant uniquement sur les équations générales de la théorie mathématique de l'élasticité, en faisant un calcul d'approximation très-rationnel, est néanmoins conduit, lui aussi, à un problème d'Analyse dont les données sont, en général, incompatibles.

Supposons une plaque d'épaisseur uniforme et très-petite  $2\varepsilon$ , dont le plan moyen pris pour plan des  $x\gamma$  soit, pour abrégér le langage, regardé comme horizontal, en sorte que la coordonnée verticale  $z$  d'un point quelconque de la plaque varie entre les limites  $-\varepsilon$  et  $+\varepsilon$ , et reste, par suite, très-petite. Sur la masse entière de la plaque agissent des forces telles que la pesanteur; sur son pourtour cylindrique, des pressions connues ou à déterminer; sur ses bases, des pressions nulles.

Soient  $u$ ,  $v$  et  $w$  les composantes parallèles aux axes, du déplacement élastique d'un de ses points; Poisson admet que les trois fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et, par suite, celles qui expriment les composantes des forces élastiques, sont développables suivant les puissances positives de la quantité très-petite  $z$ , et il conduit son calcul d'approximation de façon à négliger les quantités de l'ordre de  $z^2$  ou  $\varepsilon^2$  dans les pressions qui sont de l'ordre de  $z$  ou de  $\varepsilon$  et les quantités de l'ordre de  $\varepsilon^3$  dans celles des pressions qui sont de l'ordre de  $\varepsilon^2$ . Dans ce dernier cas sont les pressions qui s'annulent sur les deux bases, c'est-à-dire pour  $z = \pm \varepsilon$ , puisque, si l'on admet qu'elles sont susceptibles d'être représentées approximativement par une fonction algébrique en  $z$ , elles contiennent nécessairement le facteur  $\varepsilon^2 - z^2$ , et sont, par suite, au moins du second degré.

Voici les résultats auxquels il arrive :

1°  $W_0$  étant une fonction des deux seules variables  $x$  et  $\gamma$  qui représente le déplacement vertical d'un point du plan moyen, et ce plan étant supposé sans tension, ce que Poisson ne suppose pas, mais ce que nous admettrons dans cet exposé de son travail, pour élarger tout ce qui ne donne pas lieu à difficulté, les composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  du déplacement d'un point situé à la distance  $z$  du plan moyen peuvent être sensiblement représentées par les expressions

$$(a) \quad u = -\frac{\partial W_0}{\partial x} z, \quad v = -\frac{\partial W_0}{\partial \gamma}, \quad w = W_0.$$

Ces équations expriment, comme Poisson le fait remarquer, qu'une petite ligne droite primitivement verticale ou normale au plan moyen reste, après la déformation, sensiblement droite et normale à la surface moyenne déformée.



2° La fonction  $W_0$ , au moyen de laquelle se trouvent ainsi exprimées toutes les inconnues du problème, doit satisfaire à l'équation à différences partielles du quatrième ordre déjà trouvée par les prédécesseurs de Poisson

$$(b) \quad \frac{d^4 W_0}{dx^4} + 2 \frac{d^4 W_0}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 W_0}{dy^4} = f(x, y),$$

$f$  étant une fonction donnée dépendant des forces proportionnelles aux masses qui agissent sur la plaque.

3° Sur le contour du plan moyen, c'est-à-dire sur sa ligne d'intersection avec le cylindre formant la surface latérale de la plaque, la fonction  $W_0$  doit satisfaire à trois conditions. Elles expriment que les pressions extérieures agissant le long de l'une quelconque des génératrices de ce cylindre et les forces élastiques agissant le long de cette même génératrice se feraient équilibre si cette petite ligne était rigide.

Soient  $ab, a_1 b_1$  deux génératrices infiniment voisines de ce cylindre, en sorte que  $ab = a_1 b_1 = 2z$ ; soit  $ds$  leur distance comptée sur la courbe que forme le contour du plan moyen.

Transportons toutes les pressions extérieures agissant sur le rectangle  $aba_1 b_1$  en son centre, c'est-à-dire au point milieu de l'élément linéaire  $ds$ , comme si ce rectangle faisait partie d'un système rigide.

Dans l'hypothèse où nous nous plaçons d'une tension nulle sur le plan moyen, la résultante de translation de ces forces est verticale ou parallèle aux génératrices  $ab, a_1 b_1$ ; appelons-la  $Z_0 ds$ ; quant à l'axe du couple résultant, il est clair qu'il est nécessairement situé dans le plan moyen; appelons  $\bar{\epsilon} ds$  et  $\bar{\tau} ds$  ses composantes suivant la tangente et la normale à la courbe qui limite le plan moyen.

Transportons de la même manière les forces élastiques qui agissent sur le rectangle  $aba_1 b_1$ ; nommons, suivant une notation de M. de Saint-Venant,  $\bar{Z}_0 ds, \bar{\epsilon} ds, \bar{\tau} ds$  leur résultante de translation et les composantes de l'axe de leur couple résultant.

Les équations de Poisson signifient que, sur tout le périmètre, on doit avoir

$$(c) \quad \begin{cases} \bar{Z}_0 + Z_0 = 0, \\ \bar{\tau} + \tau = 0, \\ \bar{\epsilon} + \epsilon = 0. \end{cases}$$

Et, comme les forces élastiques  $\bar{Z}_0$ ,  $\bar{e}$ ,  $\bar{\alpha}$  s'expriment au moyen des dérivées des déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $\alpha$ , et par suite aussi, en vertu de (a) au moyen des dérivées de la fonction inconnue  $W_0$ , on a trois conditions au pourtour auxquelles cette fonction doit satisfaire.

Or Kirchhoff montre que ces trois conditions à la surface ou au pourtour sont incompatibles avec l'équation à différences partielles qui régit la fonction  $W_0$ ; que si l'on assujettit cette fonction à satisfaire à cette équation et à deux des conditions à la surface, on ne dispose plus des arbitraires nécessaires pour satisfaire à la troisième, en sorte que, pour que le problème d'Analyse soit possible, il faut qu'une certaine condition soit remplie entre les forces extérieures données qui agissent sur la plaque, résultat qui semble absurde, étant donnée la question de Physique dont ce problème d'Analyse est la traduction.

Cependant il est impossible, il me paraît en tous cas impossible, de découvrir une erreur dans le Mémoire de Poisson; l'équation à différences partielles (b) trouvée pour la fonction  $W_0$  n'a jamais été mise en doute; les conditions à la surface données par Poisson sont *rigoureusement* nécessaires; on pourrait douter qu'elles soient suffisantes; si, en effet, il s'agissait d'un cylindre de hauteur  $2a$  finie et d'un problème à résoudre rigoureusement, il ne suffirait pas d'exprimer, comme le fait Poisson, que les forces extérieures élastiques agissant le long de chaque génératrice du cylindre contournant satisfont aux conditions d'équilibre d'un système invariable, mais qu'il y a équilibre entre la force extérieure et la force élastique agissant sur *chacun des éléments superficiels* de ce cylindre. Or ces dernières conditions entraînent celles de Poisson, en sorte que celles-ci sont rigoureusement nécessaires.

Les calculs de Poisson montrent, et c'est là leur caractère et le caractère même du problème des plaques, qu'ils sont suffisants au degré d'approximation qu'il a cherché; mais leur nécessité n'est pas seulement une question d'approximation; elle est de rigueur.

Comment alors expliquer que ces conditions puissent être analytiquement surabondantes, quand d'ailleurs on sait que le problème général d'Analyse auquel donne lieu la théorie mathématique de l'élasticité est possible et déterminé?

Sans s'arrêter à cette question, Kirchhoff, dans le Mémoire susmentionné, reprend le problème d'une autre manière. Se bornant au cas où la tension du plan moyen est nulle, il commence par poser cette hy-

pothèse, analogue à celle que fait Jacob Bernoulli sur les verges élastiques et à celle que Navier avait déjà faite en 1820 sur le problème même des plaques [\*], qu'une petite ligne naturellement droite et normale au plan moyen reste, après la déformation : 1° droite, 2° normale au plan moyen déformé.

En introduisant ces hypothèses dans l'expression du potentiel des forces élastiques et écrivant que la variation du potentiel pour un déplacement virtuel  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  est égale au travail correspondant des forces extérieures appliquées, soit sur la masse entière, soit sur la surface latérale de la plaque, il est conduit, pour définir la fonction  $W_0$ , à la même équation à différences partielles du quatrième ordre que Poisson; mais il trouve que cette fonction n'est assujettie à satisfaire qu'à deux conditions à la surface au lieu de trois. L'une de ces conditions est identique à l'une de celles de Poisson; l'autre est une combinaison particulière des deux autres conditions de Poisson.

Par suite de la réduction à deux des conditions au pourtour, le problème devient possible et déterminé.

Mais alors se présente cette question très-grave : Comment deux géomètres traitant le même problème, en faisant usage l'un et l'autre des principes de la théorie mathématique de l'élasticité, les employant seulement sous deux formes analytiques différentes, mais en réalité absolument équivalentes, peuvent-ils arriver à des solutions différentes, et tellement différentes que l'un rencontre un problème d'Analyse insoluble là où l'autre trouve un problème possible et déterminé?

Cette circonstance, rapporte M. de Saint-Venant dans son grand Ouvrage sur les leçons de Navier, a fait dire à M. Gehring, un disciple

[\*] *Mémoire sur la flexion des plans élastiques*. Cet admirable travail n'a qu'un défaut : il est entaché d'une erreur de calcul, d'une erreur d'inadvertance tout à fait inexplicable, qui, je crois, n'a pas été remarquée (elle se trouve au § 4 du Mémoire autographié qui existe à la Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées), et sans laquelle Navier serait nécessairement arrivé à des formules tout à fait analogues à celles données trente ans plus tard par Kirchhoff. Mais ce Mémoire méritera toujours d'être lu et étudié comme un modèle de ce que peuvent les moyens les plus primitifs dans des mains aussi habiles. Sans le secours de la théorie mathématique de l'élasticité, dont il est, comme on le sait, le premier fondateur, mais qu'il ne créa que l'année suivante, ne disposant que du précepte « *Ut tensio sic vis* », il arrive à ses fins par les moyens les plus rapides et les plus élégants.

de Kirchhoff, dans une thèse inaugurale [\*], que l'emploi du potentiel ou du calcul des variations peut *seul* conduire pour chaque question au nombre justement nécessaire et suffisant de conditions à remplir [\*\*].

N'ayant eu occasion de connaître le travail de M. Gehring que par l'analyse qu'en donne Clebsch dans son Ouvrage sur la théorie mathématique de l'élasticité, je ne vois pas très-bien le sens qu'il attribue à la thèse qu'il soutient, et qui, par elle-même, semble n'en avoir aucun. C'est, en effet, comme si l'on soutenait que le principe des vitesses virtuelles peut *seul* conduire, dans chaque question de Statique, au nombre justement nécessaire et suffisant de conditions à remplir pour l'équilibre, et que toute autre méthode pourrait donner trop ou trop peu de conditions.

M. de Saint-Venant, après avoir exposé les difficultés dont nous venons de parler, ajoute : « Ce sujet est délicat. Nous ne doutons pas que les équations aux limites de M. Kirchhoff ne soient les véritables ; mais en quoi celles de Poisson sont-elles fausses ? C'est ce que nous n'avons pas encore eu le loisir d'étudier à fond. »

Je voudrais montrer que les deux théories de Poisson et de Kirchhoff, si différentes en apparence, sont, au fond, identiques ; que quand celle de Poisson n'est pas applicable, ce qui a lieu toutes les fois qu'une de ses trois conditions ne rentre pas dans les deux autres, celle de Kirchhoff ne l'est pas davantage.

Poisson considère, et c'est bien évidemment ainsi que le problème se pose, une plaque taillée dans un solide élastique et isotrope, dans un solide naturel ; il prend les équations qui régissent l'équilibre d'un tel solide ; il développe en séries, comme il a été dit, les fonctions inconnues ; il s'arrête aux premiers termes des séries et il reconnaît, chemin faisant et sans l'avoir cherché, que ce calcul d'approximation équivaut à supposer que les petites lignes primitivement droites et normales à la surface moyenne restent *sensiblement* telles, c'est-à-dire restent telles aux termes près qu'il a négligés.

Poursuivant ses calculs, il est conduit à un problème d'Analyse im-

[\*] *De æquationibus differentialibus quibus æquilibrium et motus laminæ crystallinæ definiuntur dissertatio inauguralis.*

[\*\*] *Résumé des leçons de Navier*, avec Notes, Appendice de M. de Saint-Venant. — Partie historique, page cclxviii.

possible; de là on ne peut, à aucun degré, déduire qu'il se soit trompé; la seule chose à conclure, et cette conclusion est rigoureuse et me paraît très-importante, c'est le théorème suivant :

*Étant donnée une plaque mince dont les deux bases ne sont soumises à aucune pression, il n'est pas permis, en général, même lorsque, dans l'évaluation des pressions qui sont de l'ordre de l'épaisseur de la plaque, on néglige les quantités de l'ordre du carré de cette épaisseur, mais que, dans les pressions qui sont de l'ordre du carré de l'épaisseur, on ne néglige que le cube de cette dimension, d'admettre que la plaque se déforme de façon que chaque ligne primitivement droite et normale au plan moyen reste, après la déformation, droite et normale à la surface moyenne déformée.*

*Pour que cela puisse être admis, il faut qu'entre les forces qui la sollicitent, tant sur son pourtour cylindrique que sur sa masse entière, il existe une certaine relation.*

Voilà, croyons-nous, le résultat absolument certain et le seul que l'on puisse tirer du beau travail de Poisson.

Nous établissons plus loin un théorème beaucoup plus général et rigoureux.

Maintenant Kirchhoff, lui, admet *a priori* que, dans la plaque qu'il étudie, les petites lignes droites normales à la surface moyenne restent telles après la déformation; il porte cette hypothèse dans l'expression du potentiel ou du travail virtuel des forces intérieures; il la porte aussi dans les expressions des déplacements virtuels  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  attribuées à chaque point de la plaque et qui entrent dans l'expression du travail virtuel des forces extérieures et il écrit que la somme des travaux de toutes les forces tant extérieures qu'intérieures est nulle pour les déplacements virtuels dont les expressions  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta w$  ont été ainsi simplifiées d'après son hypothèse. Cela revient à dire qu'il applique le principe des vitesses virtuelles non pas à tous les déplacements compatibles avec la constitution d'un corps solide naturel, ni même à des déplacements que l'on soit assuré d'avance être compatibles avec cette constitution, mais à des déplacements *supposés*, aux déplacements en vertu desquels chaque petite ligne droite et normale à la surface moyenne reste telle après le déplacement. Ces déplacements, ainsi admis *a priori*, sont-ils compatibles avec la constitution d'une plaque taillée dans un solide naturel? C'est justement ce qui est en question,

c'est-à-dire que pour s'en assurer il faudrait que le problème à résoudre fût résolu; j'ajoute que cela n'est même plus en question après la proposition que j'ai énoncée plus haut comme la conséquence certaine de la théorie de Poisson; cette proposition montre justement que les déplacements virtuels supposés *a priori* par Kirchhoff sont, en général, incompatibles avec la constitution d'une plaque prise dans un solide élastique et isotrope.

Donc, en général, les équations de Kirchhoff ne s'appliquent pas à une telle plaque; elles s'appliquent à une plaque de constitution idéale, semi-élastique, semi-rigide, à savoir : élastique dans toutes les directions parallèles au plan moyen; rigide, ou tout au moins inflexible dans le sens perpendiculaire; en un mot, à une plaque dont les diverses parties seraient censées *liées* les unes aux autres, de telle façon que les déplacements *supposés* puissent se produire et soient les seuls pouvant se produire.

On conçoit très-bien qu'en admettant ainsi entre les molécules du corps que l'on étudie des liaisons qui réduisent le nombre et la nature des déplacements virtuels possibles, on réduira le nombre des conditions d'équilibre.

Rien n'est d'ailleurs plus légitime que d'étudier ainsi des systèmes de constitution idéale, des systèmes semi-rigides, de même qu'il est légitime d'étudier en Mécanique des corps entièrement rigides, quoique de tels corps n'existent pas dans la nature. Toute la question est de savoir dans quelle mesure les résultats obtenus pourront s'appliquer aux solides naturels; or il ressort précisément du théorème donné plus haut que les résultats obtenus pour les systèmes étudiés par Kirchhoff ne seront pas, en général, applicables aux solides naturels; ils ne sont applicables que dans les cas particuliers où, entre les forces qui agissent sur les plaques, existe une relation telle que le mode particulier de déformation qu'il supposait puisse se produire, c'est-à-dire dans les cas où l'une des trois conditions à la surface de Poisson se trouve être satisfaite d'elle-même, soit identiquement, soit en vertu des deux autres; mais alors le problème d'Analyse de Poisson devient possible et conduit aux mêmes résultats que les formules de Kirchhoff.

Ainsi, quand la théorie de Poisson n'est pas applicable, celle de Kirchhoff ne l'est pas non plus, et *vice versa*. C'est ce qui devait être, parce qu'au fond elles sont absolument identiques.

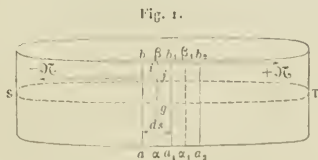
Dans ses admirables leçons de Physique mathématique, Kirchhoff est revenu tout récemment sur cette question en cherchant à justifier son hypothèse. Mais déjà de ce qui précède il ressort qu'il est impossible d'en donner une démonstration qui ne comporte pas une infinité de cas d'exceptions. Dans une Note insérée aux *Comptes rendus* du 30 avril 1877, nous en avons cité un parmi un nombre illimité que nous donnerons plus loin.

Mais il y a plus : dans cette Note nous montrons que, quand les forces agissant sur le pourtour de la plaque sont discontinues, il arrive en général que les formules de M. Kirchhoff cessent même d'avoir un sens, ce qui entraîne, en principe, leur rejet dans tous les cas ; car, en vertu du principe dû à M. de Saint-Venant, de la superposition des effets des forces élastiques, on est toujours en droit de regarder tout effet de forces continues s'exerçant sur un corps élastique comme résultant de la superposition des effets d'un nombre limité ou illimité de systèmes de forces discontinues, en sorte que le seul problème qu'il soit nécessaire et suffisant de savoir résoudre, c'est celui relatif à l'effet d'une force unique de position quelconque sur un corps élastique donné.

M. Boussinesq, persuadé que Poisson s'était trompé, a, dans un Mémoire publié au tome XVI du *Journal de M. Liouville*, cherché à mettre son erreur en évidence et aussi à établir les équations de Kirchhoff sans faire l'hypothèse qui sert de point de départ à l'éminent savant allemand.

Cela équivaut à dire que M. Boussinesq a cherché à établir que les équations de Kirchhoff sont bien applicables aux plaques naturelles, et à montrer en quoi celles de Poisson seraient erronées.

Ce qui précède démontre déjà que le but que s'est proposé M. Boussinesq ne peut être atteint ; mais il n'est pas sans intérêt d'indiquer par où pèche son raisonnement que voici.



Soit (fig. 1)  $ab, a_1b_1, a_2b_2, \dots$  une suite de génératrices infini-



ment voisines et équidistantes du cylindre contournant la plaque; soit  $ds$  l'équidistance de ces petites lignes qui ont toutes pour longueur l'épaisseur  $2\varepsilon$  de la plaque.

Appelons, comme précédemment,  $Z_0 ds$  la résultante de translation des forces extérieures agissant sur le rectangle  $ab a_1 b_1$ , et qu'on pourrait nommer l'effort tranchant;  $\varepsilon ds$  et  $\varkappa ds$  les composantes tangentielle et normale de l'axe du couple résultant, en sorte que  $\varepsilon ds$  est l'axe d'un couple dont le plan est normal au cylindre contournant et qu'on pourrait appeler le couple de flexion, et  $\varkappa ds$  l'axe d'un couple dont le plan est tangent à ce cylindre et qu'on pourrait appeler le couple de torsion.

Ce dernier couple, dit M. Boussinesq, peut être remplacé par deux forces  $\varkappa$  et  $-\varkappa$  appliquées en deux points  $i$  et  $j$  de la ligne moyenne du rectangle  $ab a_1 b_1$  et distants de  $ds$ ; puis on peut faire tourner ce couple ( $\varkappa, -\varkappa$ ) dans son plan, de façon que la force  $+\varkappa$  soit dirigée suivant  $ab$ , et celle  $-\varkappa$  suivant  $a_1 b_1$ .

Si l'on opère de même sur le rectangle  $a_1 b_1 a_2 b_2$ , on aura de même un couple dont l'une des forces, celle qui est égale à  $+(\varkappa + \frac{d\varkappa}{ds} ds)$  sera dirigée suivant la génératrice  $a_1 b_1$ , en sorte que la résultante des forces provenant des deux couples dirigée suivant cette ligne sera  $\frac{d\varkappa}{ds} ds$ ; à cette force vient s'ajouter celle  $Z_0 ds$  de même direction, en sorte que l'on aurait au total :

1° La force verticale

$$\left( Z_0 + \frac{d\varkappa}{ds} \right) ds;$$

2° Le couple de flexion  $\varepsilon ds$ .

En opérant de même sur les forces élastiques, on les réduirait aussi à une force verticale qui, d'après nos notations antérieures, serait

$$\left( \bar{Z}_0 + \frac{d\bar{\varkappa}}{ds} \right) ds$$

et à un couple

$$\bar{\varepsilon} ds.$$

Les équations de conditions à remplir sur le pourtour seraient donc



au nombre de deux seulement

$$\bar{c} + \bar{c}' = 0, \quad \bar{Z}_0 + \frac{d\bar{\mathcal{C}}}{ds} + Z + \frac{d\mathcal{C}}{ds} = 0.$$

Ce sont bien celles trouvées d'une autre manière par Kirchhoff.

C'est pour n'avoir pas songé à faire tourner ainsi ces couples  $(\mathcal{C}, -\mathcal{C})$  que Poisson se serait, suivant M. Boussinesq, trompé et serait arrivé à une condition de trop à la surface. « Poisson, dit M. Boussinesq, à la page 244 de son Mémoire, ayant négligé de remplacer les couples parallèles au cylindre contournant par des forces dirigées suivant les génératrices de ce cylindre, et de fonder, par suite, leur effet dans celui de la composante  $Z_0$ , les a regardés comme représentant un mode d'action distinct sur chaque bande (chaque rectangle  $ab a_1 b_1$ ), ce qui lui a donné une condition de trop. »

*A priori*, on admettra difficilement que dans un problème on puisse arriver à un résultat différent, suivant qu'on aura ou non remplacé un couple par un couple statiquement équivalent, si toutefois cette substitution est permise; un artifice, quel qu'il soit, on le comprend, peut faciliter la solution d'un problème, mais non la modifier; s'il la modifie, on peut affirmer d'avance qu'il est illégitime; c'est, en effet, ce qui a lieu ici. Il n'est permis ni rigoureusement, ni approximativement, si l'on a affaire à une plaque prise dans un solide naturel, comme l'a supposé Poisson et comme le suppose M. Boussinesq, puisque son but est de se passer de l'hypothèse de Kirchhoff, de remplacer les deux forces  $\mathcal{C}, -\mathcal{C}$  appliquées aux points  $i$  et  $j$  de la ligne médiane du rectangle  $ab a_1 b_1$ , par un autre couple statiquement équivalent dont les deux forces soient dirigées suivant les côtés  $ab, a_1 b_1$  de ce rectangle. En effet, quelles que soient les forces élastiques agissant sur les différents éléments superficiels qui composent le rectangle  $ab a_1 b_1$ , de hauteur  $2\varepsilon$  et de largeur  $ds$ , on peut les supposer appliquées aux différents points de sa ligne médiane  $\alpha\beta$ . Comme nous l'avons déjà fait observer plus haut, le caractère essentiel de l'approximation que Poisson a cherchée et que l'on cherche dans les plaques minces réside dans ce que, au lieu de déterminer rigoureusement ces forces, on les remplace approximativement par d'autres, par des pressions fictives, satisfaisant simplement à la condition d'avoir même résultante de translation et même moment résultant que les pressions

vraies; mais il va de soi que les pressions fictives doivent s'exercer sur les mêmes éléments superficiels que les pressions vraies qu'elles remplacent approximativement: leurs points d'application doivent donc être distribués sur la ligne  $\alpha\beta$ . Il s'ensuit qu'on peut, sans inconvénient et dans la limite d'approximation supposée, remplacer les deux forces  $\varkappa$ ,  $-\varkappa$  appliquées aux points  $i$  et  $j$  par d'autres équivalentes, *pourvu qu'elles soient aussi appliquées en des points de la ligne  $\alpha\beta$* ; mais on n'est pas en droit de tourner le couple ( $\varkappa$ ,  $-\varkappa$ ) de façon que les points d'application des deux forces qui les composent s'éloignent de cette ligne d'une quantité infiniment petite de l'ordre de  $ds$ . Cela est évident, et, pour rendre la chose en quelque sorte palpable, il suffit de supposer une plaque appuyée sur son pourtour moyen, c'est-à-dire une plaque dont le contour moyen ST soit supposé fixe. Alors il est clair que le couple ( $\varkappa$ ,  $-\varkappa$ ) agissant aux points  $i$  et  $j$  produira une déformation élastique, tandis que, si on le tourne dans son plan de façon à faire agir les deux forces qui le composent aux deux extrémités de la petite ligne  $ds$  du contour moyen, il n'en produira pas, cette ligne étant supposée fixe.

Même, si l'on admettait que les lignes telles que  $ab$ ,  $\alpha\beta$ ,  $a$ ,  $b$ , etc., primitivement normales au plan moyen, se comportent comme si elles étaient inflexibles, le déplacement du couple opéré par M. Boussinesq ne serait encore pas permis. Pour qu'il devienne licite, il faut supposer non-seulement que les droites telles que  $\alpha\beta$ , primitivement normales au plan moyen, restent droites après la déformation, mais encore qu'elles restent normales au plan moyen. Alors l'ensemble des deux lignes  $\alpha\beta$  et  $ds$  forme un système invariable, puisque leur angle ne peut, par hypothèse, pas changer, et il devient légitime de transporter le couple ( $\varkappa$ ,  $-\varkappa$ ) de l'une à l'autre.

Ainsi, pour que ce déplacement de couple soit admissible, il faut justement admettre *en son entier* l'hypothèse de Kirchhoff, cette hypothèse que Kirchhoff a franchement mise en évidence au début de son ancien Mémoire, et que le but principal de M. Boussinesq et aussi de M. Gehring était d'éviter [\*].

---

[\*] L'examen du travail de M. Gehring, qui porte sur la déformation *finie* des plaques planes, nous conduirait en dehors des limites de notre sujet. Nous aurons

Ainsi, en résumé, la solution de Poisson n'est pas suffisante, non parce qu'elle est erronée en quelque point que ce soit, mais parce qu'elle est trop particulière, parce que, en général, elle ne permet pas de satisfaire à toutes les conditions du problème. La solution de Kirchhoff est tout aussi particulière et n'est applicable que dans les mêmes cas; en dehors de ces cas, les formules de Poisson manifestent d'elles-mêmes leur impuissance en conduisant à un problème d'Analyse impossible; l'insuffisance de celles de Kirchhoff est un peu plus cachée en ce qu'elles conduisent toujours, et c'est par là qu'elles séduisent et paraissent plus vraies que celles de Poisson, à un système d'équations différentielles soluble; mais ces équations, ne sont pas en général, applicables aux solides isotropes et le problème des plaques *élastiques et isotropes* reste à mettre en équation.

## II.

### *Sur quelques cas particuliers du problème de l'équilibre d'un cylindre élastique.*

Pour y parvenir, au lieu de prendre de suite, comme on l'a fait, un problème d'approximation, nous chercherons d'abord à résoudre un problème rigoureux; au lieu de considérer une plaque mince, nous considérerons d'abord un cylindre élastique de hauteur  $2z$  quelconque; nous ferons abstraction des forces telles que la pesanteur agissant sur sa masse; nous supposerons que sur ses deux bases ne s'exercent pas de pressions, mais seulement sur sa surface latérale. Le plan moyen du cylindre étant pris pour plan des  $xy$  et l'axe des  $z$  étant, par suite, parallèle à ses génératrices, nous posons la question suivante :

Est-il possible de trouver pour les composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  des déplacements élastiques d'un point quelconque de ce corps et, par suite, pour les composantes des forces élastiques qui s'y exercent, des expressions algébriques et entières relativement à  $z$ , composées d'un nombre fini

---

peut-être occasion d'en parler dans un Mémoire que nous nous réservons de faire sur la déformation finie ou infiniment petite des plaques courbes.

de termes, satisfaisant en tous les points du cylindre aux équations d'équilibre élastique et satisfaisant, en outre, à la condition que les pressions soient nulles sur les deux bases? S'il existe une solution de cette forme, elle permettra d'abord de résoudre rigoureusement le problème de l'équilibre élastique des corps cylindriques dans une infinité de cas nouveaux; si, d'ailleurs, cette solution contient assez d'arbitraires pour permettre de satisfaire aux conditions sur la surface latérale, en prenant arbitrairement non pas chacune des forces agissant sur cette surface (ce qui ne pourrait pas être à cause de la forme particulière adoptée pour la solution), mais la résultante de translation et le moment résultant des pressions agissant le long de chaque génératrice, alors le problème des plaques tel qu'il est posé sera résolu. Si, au contraire, la solution cherchée n'existe pas, ou si, existant, elle ne renferme pas assez d'arbitraires pour permettre de remplir cette dernière condition, alors de ce résultat négatif on pourra tout au moins déduire que ce problème des plaques ne peut pas être résolu sous forme algébrique par rapport à  $z$ , et qu'il faut chercher quelque expression d'une autre forme.

Soit  $\theta$  la dilatation cubique, en un point d'un corps élastique et isotrope; les équations d'équilibre, lorsqu'on fait abstraction des forces extérieures, peuvent s'écrire

$$(1) \quad \begin{cases} (2k+1)\theta + \Delta_2 u = 0, \\ (2k+1)\theta + \Delta_2 v = 0, \\ (2k+1)\theta + \Delta_2 w = 0, \\ \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \end{cases}$$

où

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

et  $k$  est un coefficient numérique qui, d'après les idées de Poisson, de Cauchy, de Duhamel, de M. de Saint-Venant et les belles expériences de M. Cornu, devrait être pris égal à  $\frac{1}{2}$ .

Les composantes des pressions que nous désignons, avec Lamé, par les lettres  $N_i$  et  $T_i$ , auront pour expressions,  $K$  étant un nou-

veau coefficient qui est en relation très-simple avec ce qu'on appelle le module d'élasticité,

$$(2) \quad \begin{cases} N_1 = 2K \left( k\zeta + \frac{\partial u}{\partial x} \right), & N_2 = 2K \left( k\zeta + \frac{\partial v}{\partial y} \right), & N_3 = 2K \left( k\zeta + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ T_1 = K \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & T_2 = K \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), & T_3 = K \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Pour résoudre le problème posé, développons d'abord les quatre fonctions  $u, v, w, \theta$  en séries illimitées par rapport aux puissances entières et positives de  $z$ . Soit

$$(3) \quad u = \sum_i U_i \frac{z^i}{i!}, \quad v = \sum_i V_i \frac{z^i}{i!}, \quad w = \sum_i W_i \frac{z^i}{i!}, \quad \theta = \sum_i \theta_i \frac{z^i}{i!},$$

où  $U_i, V_i, W_i, \theta_i$  sont quatre séries de fonctions indéterminées des deux seules variables  $x, y$ .

Si l'on porte ces expressions dans les équations (1), on obtient, pour définir ces fonctions, les quatre séries d'équations

$$(a) \quad (2k+1) \frac{\partial \theta_i}{\partial x} + \Delta_2 U_i + U_{i+2} = 0,$$

$$(b) \quad (2k+1) \frac{\partial \theta_i}{\partial y} + \Delta_2 V_i + V_{i+2} = 0,$$

$$(c) \quad (2k+1) \theta_{i+1} + \Delta_2 W_i + W_{i+2} = 0,$$

$$(d) \quad \theta_i = \frac{\partial U_i}{\partial x} + \frac{\partial V_i}{\partial y} + W_{i+1},$$

qui doivent avoir lieu pour toutes les valeurs 0, 1, 2, 3, ... de  $i$  jusqu'à l'infini.

Si l'on différentie la première par rapport à  $x$ , la seconde par rapport à  $y$ ; qu'on les ajoute à la troisième, où  $i$  est remplacé par  $i+1$ , il viendra, à cause de la dernière,

$$\Delta_2 \theta_i + \theta_{i+2} = 0,$$

qui fournit  $\theta_2, \theta_3, \theta_4, \dots$  au moyen des deux fonctions  $\theta_0, \theta_1$ , lesquelles restent seules arbitraires.

Le symbole  $\Delta_2$  équivaut simplement, pour les fonctions à deux variables, à  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Introduisons encore la notation symbolique

$$\Delta_2^i F = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^i F,$$

en sorte que

$$\Delta_2^0 F = F, \quad \Delta_2^1 F = \Delta_2 F.$$

On tire de la dernière équation

$$(I) \quad \theta_{2j} = (-1)^j \Delta_2^j \theta_0, \quad \theta_{2j+1} = (-1)^j \Delta_2^j \theta_1,$$

qui s'appliquent à toutes les valeurs de  $j$ ,  $y$  compris  $j = 0$ .

Les  $\theta_i$  étant ainsi connus, l'équation (a) fournit  $U_2, U_3, U_4, \dots$  au moyen des deux fonctions  $U_0, U_1$  qui restent arbitraires; et de même l'équation (b) fournit tous les  $V_i$  au moyen de deux nouvelles fonctions arbitraires  $V_0, V_1$ . Il vient ainsi

$$(II) \quad \begin{cases} U_{2j} = (-1)^j \left[ \Delta_2^j U_0 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \theta_0}{\partial x} \right], \\ U_{2j+1} = (-1)^j \left[ \Delta_2^j U_1 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \theta_1}{\partial x} \right], \end{cases}$$

$$(III) \quad \begin{cases} V_{2j} = (-1)^j \left[ \Delta_2^j V_0 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \theta_0}{\partial y} \right], \\ V_{2j+1} = (-1)^j \left[ \Delta_2^j V_1 + j(2k+1) \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \theta_1}{\partial y} \right], \end{cases}$$

applicables aussi à toutes les valeurs de  $j$ ,  $y$  compris  $j = 0$ .

L'équation (d) fournira ensuite tous les  $W_i$ , *excepté*  $W_0$ , au moyen des  $U_i, V_i, \theta_i$ , c'est-à-dire au moyen des six fonctions arbitraires  $\theta_0, \theta_1, U_0, U_1, V_0, V_1$  et de leurs dérivées. Il vient

$$(IV) \quad \begin{cases} W_{2j-1} = (-1)^j \left\{ \Delta_2^{j-1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) + [j(2k+1) - 2k - 2] \Delta_2^{j-1} \theta_0 \right\}, \\ W_{2j} = (-1)^j \left\{ \Delta_2^{j-1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) + [j(2k+1) - 2k - 2] \Delta_2^{j-1} \theta_1 \right\}. \end{cases}$$

Ces nouvelles équations ne s'appliquent que pour  $j = 1, 2, 3, \dots$ ; pour  $j = 0$ , elles n'ont pas de sens.

Nous connaissons maintenant toutes les fonctions  $\theta_i, U_i, V_i, W_i$ ,

sauf celle  $W_0$ ; mais il nous reste à satisfaire à l'équation (c). Si l'on porte toutes les expressions que nous venons de trouver, on reconnaît qu'elle est satisfaite d'elle-même pour toutes les valeurs de  $i$ , sauf pour  $i = 0$ ; et pour cette dernière valeur elle devient

$$\Delta_2 W_0 + W_2 + (2k + 1)\theta_1 = 0,$$

ou, en remplaçant  $W_2$  par sa valeur (IV),

$$(V) \quad \Delta_2 W_0 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - (2k + 2)\theta_1,$$

qui sert à définir  $W_0$ .

Cette distinction, qui s'établit ainsi dès le début entre la fonction  $W_0$  et toutes les autres, mérite d'être remarquée; il était assez naturel de s'attendre, d'après la forme des équations de l'élasticité, à ce que les fonctions indéterminées  $U_i, V_i, W_i$  s'expriment au moyen de six fonctions arbitraires. Il se trouve qu'elles s'expriment au moyen de six pareilles fonctions  $\theta_0, \theta_1, U_0, U_1, V_0, V_1$ , et au moyen d'une septième fonction  $W_0$ , qui n'est pas entièrement arbitraire, mais qui est définie par une équation à dérivées partielles du second ordre et renferme, par suite, des arbitraires. Cette fonction  $W_0$  est précisément celle qui, dans les plaques, donne la flexion du plan moyen; elle est la seule inconnue du problème des plaques dans les théories que nous avons exposées et, dans une théorie plus complète, elle restera toujours l'inconnue principale; on comprend donc que cette particularité que nous signalons ici et qui mérite d'être remarquée même au point de vue analytique, en ce qu'elle dénote une fois de plus la difficulté de connaître à l'avance le nombre et la nature des arbitraires qui s'introduisent dans les intégrales, même les plus particulières, des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur, aura une grande importance dans l'étude des plaques.

Si l'on porte ces valeurs des  $U_i, V_i, W_i, \theta_i$  dans les expressions (2) des forces élastiques et qu'on pose, pour abrégér,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = \sum_i N_1^{(i)} \frac{z^i}{\bar{l}^i}, \quad N_2 = \sum_i N_2^{(i)} \frac{z^i}{\bar{l}^i}, \quad N_3 = \sum_i N_3^{(i)} \frac{z^i}{\bar{l}^i}; \\ T_1 = \sum_i T_1^{(i)} \frac{z^i}{\bar{l}^i}, \quad T_2 = \sum_i T_2^{(i)} \frac{z^i}{\bar{l}^i}, \quad T_3 = \sum_i T_3^{(i)} \frac{z^i}{\bar{l}^i}, \end{array} \right.$$

on aura, en faisant les réductions convenables, pour toutes les valeurs

de  $j$  autres que  $j = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left\{ \begin{aligned} N_1^{(2j)} &= (-1)^j 2K \left\{ k \Delta_2^j \Theta_0 + (2k+1)j \frac{\partial^2 \Delta_2^{j-2} \Theta_0}{\partial x^2} + \Delta_2^j \frac{\partial U_0}{\partial x} \right\}, \\ N_1^{(2j+1)} &= (-1)^j 2K \left\{ k \Delta_2^j \Theta_1 + (2k+1)j \frac{\partial^2 \Delta_2^{j-1} \Theta_1}{\partial x^2} + \Delta_2^j \frac{\partial U_1}{\partial x} \right\}, \end{aligned} \right. \\
 (2) \quad & \left\{ \begin{aligned} N_2^{(2j)} &= (-1)^j 2K \left\{ k \Delta_2^j \Theta_0 + (2k+1)j \frac{\partial^2 \Delta_2^{j-1} \Theta_0}{\partial y^2} + \Delta_2^j \frac{\partial U_0}{\partial y} \right\}, \\ N_2^{(2j+1)} &= (-1)^j 2K \left\{ k \Delta_2^j \Theta_1 + (2k+1)j \frac{\partial^2 \Delta_2^{j-1} \Theta_1}{\partial y^2} + \Delta_2^j \frac{\partial U_1}{\partial y} \right\}, \end{aligned} \right. \\
 (3) \quad & \left\{ \begin{aligned} N_3^{(2j)} &= (-1)^j 2K \left\{ [1+k-j(2k+1)] \Delta_2^j \Theta_0 - \Delta_2^j \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) \right\}, \\ N_3^{(2j+1)} &= (-1)^j 2K \left\{ [1+k-j(2k+1)] \Delta_2^j \Theta_1 - \Delta_2^j \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \right\}, \end{aligned} \right. \\
 (4) \quad & \left\{ \begin{aligned} T_1^{(2j)} &= (-1)^j K \left\{ -2[1+k-j(2k+1)] \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_1}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right)}{\partial y} + \Delta_2^j V_1 \right\}, \\ T_1^{(2j-1)} &= (-1)^j K \left\{ -2[1+k-j(2k-1)] \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_0}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right)}{\partial y} + \Delta_2^j V_0 \right\}, \end{aligned} \right. \\
 (5) \quad & \left\{ \begin{aligned} T_2^j &= (-1)^j K \left\{ -2[1+k-j(2k+1)] + \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_1}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right)}{\partial x} + \Delta_2^j U_1 \right\}, \\ T_2^{j-1} &= (-1)^j K \left\{ -2[1+k-j(2k+1)] \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \Theta_0}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right)}{\partial x} + \Delta_2^j U_0 \right\}, \end{aligned} \right. \\
 (6) \quad & \left\{ \begin{aligned} T_3^j &= (-1)^j K \left\{ 2j(2k+1) \frac{\partial^2 \Delta_2^{j-1} \Theta_0}{\partial x \partial y} + \Delta_2^j \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) \right\}, \\ T_3^{(2j+1)} &= (-1)^j K \left\{ 2j(2k+1) \frac{\partial^2 \Delta_2^{j-1} \Theta_1}{\partial x \partial y} + \Delta_2^j \left( \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \right) \right\}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$



Les équations qui donnent les  $N_1^{(j)}$ ,  $N_2^{(j)}$ ,  $N_3^{(j)}$  et les  $T_3^{(j)}$  sont encore applicables pour  $j = 0$ . Celles qui donnent les  $T_1^{(j)}$  et  $T_2^{(j)}$  n'ont plus de sens, et l'on trouve

$$(VII) \quad \begin{cases} T_1^{(0)} = K \left( \frac{\partial W_0}{\partial y} + V_1 \right), \\ T_2^{(0)} = K \left( \frac{\partial W_0}{\partial x} + U_1 \right). \end{cases}$$

Cela posé, pour que les séries qui fournissent les expressions des déplacements se limitent, il faut et il suffit, en vertu de (I), (II), (III),  $n$  étant un nombre entier, que les six fonctions arbitraires  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ ,  $U_0$ ,  $U_1$ ,  $V_0$ ,  $V_1$  satisfassent aux six équations à différences partielles d'ordre  $2n$

$$(5) \quad \Delta_2^n \theta_0 = 0, \quad \Delta_2^n U_0 = 0, \quad \Delta_2^n V_0 = 0,$$

$$(5 \text{ bis}) \quad \Delta_2^n \theta_1 = 0, \quad \Delta_2^n U_1 = 0, \quad \Delta_2^n V_1 = 0.$$

Si ces six équations sont satisfaites, les séries qui fournissent les expressions des forces élastiques se limitent également, en vertu des formules (VI), comme on le voit, en observant que des formules (5) et (5 bis) on tire

$$(5 \text{ ter}) \quad \begin{cases} \Delta_2^n \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = 0, \\ \Delta_2^n \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) = 0, \\ \Delta_2^n \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) = 0, \\ \Delta_2^n \left( \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial V_1}{\partial x} \right) = 0. \end{cases}$$

D'autre part, on demande que les pressions sur les deux bases du cylindre soient nulles. La pression par unité de surface, sur un élément superficiel parallèle aux bases ou perpendiculaire à l'axe des  $z$ , a pour composantes

$$N_3, \quad T_1, \quad T_2;$$

il faut donc que ces trois fonctions s'annulent pour  $z = +\varepsilon$  et  $z = -\varepsilon$ , le plan moyen du cylindre, dont la hauteur  $2\varepsilon$  est ici de

grandeur quelconque, étant pris pour plan des  $xy$ , ce qui donne, en vertu des expressions (4), les six équations

$$\begin{aligned} \sum_j N_3^{2j} \frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} \pm \sum_j N_3^{2j+1} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{(2j+1)!} &= 0, \\ \sum_j T_1^{2j} \frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} \pm \sum_j T_1^{2j+1} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{(2j+1)!} &= 0, \\ \sum_j T_2^{2j} \frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} \pm \sum_j T_2^{2j+1} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{(2j+1)!} &= 0. \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \sum_j N_3^{2j} \frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} &= 0, & \sum_j N_3^{2j+1} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{2j+1!} &= 0, \\ \sum_j T_1^{2j} \frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} &= 0, & \sum_j T_1^{2j+1} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{2j+1!} &= 0, \\ \sum_j T_2^{2j} \frac{\varepsilon^{2j}}{2j!} &= 0, & \sum_j T_2^{2j+1} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{2j+1!} &= 0. \end{aligned}$$

Remplaçant les  $N^{(i)}$  et les  $T^{(i)}$  par leurs valeurs (VI), il vient, en désignant par  $\sum_0$  ou  $\sum_1$  des sommes relatives aux valeurs entières de  $j$ , suivant qu'elles comprennent ou non la valeur  $j = 0$ ,

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \sum_0 (-1)^j \left\{ [1+k-j(2k+1)] \Delta_2^j \theta_0 - \Delta_2^j \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) \right\} \frac{\varepsilon^j}{2j!} &= 0, \\ \sum_1 (-1)^j \left\{ -2[1+k-j(2k+1)] \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \theta_0}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right)}{\partial x} + \Delta_2^j U_0 \right\} \frac{\varepsilon^{j-1}}{2j-1!} = 0, \\ \sum_1 (-1)^j \left\{ -2[1+k-j(2k+1)] \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \theta_0}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right)}{\partial y} + \Delta_2^j V_0 \right\} \frac{\varepsilon^{j-1}}{2j-1!} = 0. \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \sum_0 (-1)^j \left\{ [1 + k - j(2k + 1)] \Delta_1^j \theta_1 - \Delta_2^j \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \right\} \frac{\varepsilon^{2j+1}}{2j+1!} = 0, \\
 & \frac{dW_0}{dx} + U_1 + \sum_1 (-1)^j \left\{ -2 [1 + k - j(2k + 1)] \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \theta_1}{\partial x} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right)}{\partial x} + \Delta_2^j U_1 \right\} \frac{\varepsilon^j}{2j!} = 0, \\
 & \frac{dW_0}{dy} + V_1 + \sum_1 (-1)^j \left\{ -2 [1 + k - j(2k + 1)] \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \theta_1}{\partial y} \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{\partial \Delta_2^{j-1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right)}{\partial y} + \Delta_2^j V_1 \right\} \frac{\varepsilon^j}{2j!} = 0.
 \end{aligned} \right\} \text{(6 bis)}$$

Ces équations, en vertu de (5), (5 bis), (5 ter), comprennent un nombre limité de termes, et sont aux différences partielles d'ordre  $2n$  au plus.

Ainsi, pour que toutes les séries se limitent et qu'en même temps les conditions à la surface relatives aux deux bases du cylindre soient remplies, il faut et il suffit que les sept fonctions  $\theta_0, \theta_1; U_0, U_1; V_0, V_1; W_0$  satisfassent simultanément aux treize équations à différences partielles (V), (5), (5 bis), (6), (6 bis), dont deux d'ordre  $2n$  ou d'ordre moindre, et une du second ordre.

Cherchons donc les conditions pour que ces treize équations puissent avoir une solution commune.

On voit de suite qu'elles se dédoublent et que les trois fonctions  $\theta_0, U_0, V_0$  doivent satisfaire simultanément aux six équations (5) et (6) et les quatre fonctions  $\theta_1, U_1, V_1, W_0$  aux sept équations (V), (5 bis) et (6 bis). Occupons-nous d'abord des premières.

Ajoutons les deux dernières (6) après les avoir différenciées par rapport à  $x$  et à  $y$ , en observant que

$$\Delta_2^j = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Delta_2^{j-1};$$

$$\sum_0 (-1)^j \left\{ [1 + k - j(2k + 1)] \Delta_2^j \theta_0 - \Delta_2^j \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) \right\} \frac{\varepsilon^{2j-1}}{2j-1!} = 0.$$

Prenons maintenant  $(n - 2)$  fois de suite les  $\Delta_2$  de cette équation, en observant que

$$\Delta_2^{j+2} = \Delta_2^j \cdot \Delta_2^2;$$

à cause des deux équations

$$(c) \quad \Delta_2^n \theta_1 = 0, \quad \Delta_2^n \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = 0,$$

l'équation obtenue se réduira au seul terme répondant à  $j = 1$ , et divisé par  $\varepsilon$ ; elle deviendra

$$k \Delta_2^{n-1} \theta_0 + \Delta_2^{n-1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = 0.$$

Prenons maintenant  $(n - 1)$  fois de suite les  $\Delta_2$  de la première (6), elle se réduira de même à son premier terme, celui qui correspond à  $j = 0$ , et donnera

$$(1 + k) \Delta_2^{n-1} \theta_0 - \Delta_2^{n-1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = 0.$$

Les deux dernières équations, linéaires et homogènes par rapport aux quantités  $\Delta_2^{n-1} \theta_0$ ,  $\Delta_2^{n-1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right)$  et ayant nécessairement leur déterminant différent de zéro, donnent

$$\Delta_2^{n-1} \theta_0 = 0, \quad \Delta_2^{n-1} \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = 0.$$

Observons d'ailleurs que, pour déduire ce dernier résultat des équations (6), nous nous sommes appuyé uniquement sur les deux relations (e). Ainsi, de ce que ces relations (e) sont satisfaites pour l'entier  $n$ , nous en déduisons qu'elles le sont nécessairement pour  $n - 1$ ; de là nous déduisons de même qu'elles le sont pour  $n - 2$ , et ainsi de suite jusqu'à  $n = 1$ .

Ainsi, pour que les six équations à différences partielles (5) et (6) puissent être compatibles, il est nécessaire que l'on ait

$$(c') \quad \Delta_2 \theta^0 = 0, \quad \Delta_2 \left( \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) = 0.$$

Mais alors la première (e') est satisfaite d'elle-même, la première (6) se réduit à son premier terme et donne entre les deux fonctions  $\theta_0$  et

$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}$  la relation suivante

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = (k + 1)\theta_0,$$

en sorte que la dernière (e') est une conséquence de la première. En résumé, les équations (5) et (6) se réduisent à

$$\Delta_2 \theta_0 = 0, \quad \Delta_1^n \theta_0 = 0, \quad \Delta_2^n V_0 = 0,$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = (k + 1)\theta_0,$$

$$\sum_1 (-1)^j \Delta_2^j U_0 \frac{x^{2j-1}}{2j-1!} = (3k + 1) \frac{\partial \theta_0}{\partial x},$$

$$\sum_1 (-1)^j \Delta_2^j V_0 \frac{x^{2j-2}}{2j-2!} = (3k + 1) \frac{\partial \theta_0}{\partial y}.$$

Maintenant, je dis que ces équations sont incompatibles si  $n$  est supérieur à 2. En effet, si  $n$  est supérieur à 2 et qu'on prenne  $n - 2$  fois les  $\Delta_2$  des deux dernières équations, les seconds membres disparaîtront en vertu de l'équation

$$\Delta_2 \theta_0 = \Delta_2^2 \theta_0 = 0;$$

et les premiers se réduisent à leurs premiers termes et deviennent

$$\Delta_2^{n-1} U_0 = 0, \quad \Delta_2^{n-1} V_0 = 0.$$

Ainsi, si  $n > 2$ , de ce que les  $\Delta_2^n$  de ces deux fonctions sont nulles, on déduit que les  $\Delta_2^{n-1}$  le sont également; de même, si  $n - 1 > 2$ , on conclura que les  $\Delta_2^{n-2}$  le sont, et ainsi de suite, en sorte qu'il faut nécessairement que les  $\Delta_2^2$  le soient, c'est-à-dire que dans les équations ci-dessus on ait  $n = 2$ .

Alors elles deviennent

$$\begin{aligned} \Delta_2^2 \theta_0 = 0, \quad \Delta_2^2 U_0 = 0, \quad \Delta_2^2 V_0 = 0, \\ \text{(VIII)} \quad \begin{cases} \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = (k+1) \theta_0, \\ (3k+1) \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + \Delta_2 U_0 = 0, \\ (3k+1) \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \Delta_2 V_0 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Maintenant il n'est pas difficile de voir que les trois premières sont des conséquences des trois dernières, en sorte que ce sont celles-ci qui fournissent les valeurs les plus générales possibles des trois fonctions  $U_0, V_0, \theta_0$ , satisfaisant aux conditions voulues et toutes les solutions de ce système de trois équations y satisfont; on pourrait le vérifier directement, comme nous le ferons pour les équations analogues, mais un peu plus compliquées (IX), de la page 248.

Passons maintenant aux sept équations (V), (5 bis) et (6 bis) qui doivent être satisfaites simultanément par les quatre fonctions  $W_0, \theta_1, U_1, V_1$ .

En ajoutant les deux dernières (6 bis) différenciées par rapport à  $x$  et à  $y$  et ayant égard à (V) qui permet d'éliminer la fonction  $W_0$  du résultat, il vient, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - (k+1) \theta_1 + \sum_1 (-1)^j \\ \times \left\{ -[1+k-j(2k+1)] \Delta_1^j \theta_1 + \Delta_1^j \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \right\} \frac{\varepsilon^j}{2^j!} = 0. \end{aligned}$$

Cette équation peut s'écrire plus simplement

$$\sum_0 (-1)^j \left\{ -[1+k-j(2k+1)] \Delta_1^j \theta_1 + \Delta_1^j \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \right\} \frac{\varepsilon^j}{j!} = 0.$$

Si l'on prend  $n-1$  fois de suite les  $\Delta_2$ , elle se réduit, à cause de

$$\Delta_1^n \theta_1 = 0, \quad \Delta_1^n \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) = 0,$$

à

$$(g) \quad -(\mathbf{1} + k) \Delta_2^{n-1} \Theta_1 + \Delta_1^{n-1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) = 0.$$

Si l'on faisait la même opération sur la première (6 bis), on obtiendrait la même équation.

Prenez  $n - 2$  fois de suite les  $\Delta_2$  de l'avant-dernière, elle se réduira à ses deux premiers termes

$$-(\mathbf{1} + k) \Delta_2^{n-2} \Theta_1 + \Delta_2^{n-2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) - \left[ k \Delta_2^{n-1} \Theta_1 + \Delta_2^{n-1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \right] \frac{\varepsilon^2}{3} = 0.$$

Faisons la même opération sur la première (6 bis), il viendra, en divisant par  $\varepsilon$ ,

$$(\mathbf{1} + k) \Delta_2^{n-2} \Theta_1 - \Delta_2^{n-2} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) + \left[ k \Delta_2^{n-1} \Theta_1 + \Delta_2^{n-1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) \right] \frac{\varepsilon^2}{3} = 0.$$

Ajoutant membre à membre, et supprimant le facteur  $\left( \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{3} \right)$ :

$$k \Delta_2^{n-1} \Theta_1 + \Delta_2^{n-1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) = 0.$$

Cette équation, combinée avec celle (g), donne

$$\Delta_2^{n-1} \Theta_1 = 0, \quad \Delta_2^{n-1} \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) = 0.$$

Ainsi, de ce que les  $\Delta_2^n$  de ces deux fonctions sont nulles, nous en déduisons que les  $\Delta_2^{n-1}$  jouissent de la même propriété; d'où nous concluons, comme nous l'avons fait plus haut pour les fonctions  $\Theta_1$  et  $\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}$ ,

$$\Delta_2 \Theta_1 = 0, \quad \Delta_2 \left( \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) = 0.$$

Par suite, la première (6 bis) se réduit à

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = (k + \mathbf{1}) \Theta_1,$$

qui rend inutile l'une des deux précédentes, par exemple, la seconde.

Ainsi, les six équations (5 bis) et (6 bis) se réduisent à

$$(h) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \theta_1 = 0, \quad \Delta_2^n U_1 = 0, \quad \Delta_2^n V_1 = 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = (1+k)\theta_1, \\ \frac{dW_0}{dx} + U_1 - (3k+1)\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \sum_1 (-1)^j \Delta_2^j U_1 \frac{\varepsilon^j}{2j!} = 0, \\ \frac{dW_0}{dy} + V_1 - (3k+1)\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \sum_1 (-1)^j \Delta_2^j V_1 \frac{\varepsilon^j}{2j!} = 0, \end{array} \right.$$

auxquelles il faut adjoindre celle qui définit  $W_0$ ,

$$\Delta_2 W_0 = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} - (2k+2)\theta_1,$$

ou encore, à cause de la relation entre  $\theta_1$  et  $\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}$ ,

$$\Delta_2 W_0 + (1+k)\theta_1 = 0.$$

De ces équations on tire d'abord une conséquence importante; à cause de  $\Delta_2 \theta_1 = 0$ , la dernière donne

$$\Delta_2^2 W_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_0}{\partial y^4} = 0.$$

C'est précisément, en faisant abstraction des forces telles que la pesanteur, l'équation trouvée par Lagrange et tous ses successeurs dans le cas des plaques minces. Mais ici cette équation a un caractère tout autre, puisqu'elle est rigoureuse et non approchée et qu'elle s'applique, quelles que soient la forme et les dimensions du corps cylindrique que l'on considère, à toute solution des équations de l'élasticité jouissant de la propriété d'être algébrique et entière relativement à la coordonnée parallèle aux génératrices du cylindre, et satisfaisant en outre à la condition que les pressions soient nulles sur ses deux bases.

Je dis maintenant que les sept équations (V) ne peuvent être compatibles si  $n$  est supérieur à 3. En effet, supposons  $n > 3$  et prenons les  $\Delta_2^{n-1}$  de la cinquième et de la sixième; tous les termes des sommes  $\sum_1$



disparaîtront en vertu de  $\Delta_2^n U_1 = 0$ ,  $\Delta_2^n V_1 = 0$ ; les termes contenant la fonction  $\theta_1$  disparaîtront également, puisque  $\Delta_2 \theta_1 = 0$ , et par suite aussi  $\Delta_2^{n-1} \theta_1$ , ( $n - 1$  étant supérieur à 1) et  $\Delta_2^{n-1} \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$ ,  $\Delta_2^{n-1} \frac{\partial \theta_1}{\partial y}$ ; enfin les termes contenant  $W_0$  disparaissent de même, puisque  $\Delta_2^3 W_0$  est nul, et par suite  $\Delta_2^{n-1} W_0$ ,  $n - 1$  étant, par hypothèse,  $> 2$ .

Il restera donc

$$\Delta_2^{n-1} U_1 = 0, \quad \Delta_2^{n-1} V_1 = 0.$$

Ainsi, tant que le nombre  $n$  est supposé  $> 3$ , de ce que les  $\Delta_2^n$  des deux fonctions  $U_1$  et  $V_1$  sont nuls, on conclut que leurs  $\Delta_2^{n-1}$  le sont; donc il faut que leurs  $\Delta_2^3$  le soient, c'est-à-dire que les équations que nous étudions exigent, comme condition de compatibilité, que  $n$  soit au plus 3; pour  $n = 3$  elles deviennent

$$\Delta_2 \theta_1 = 0, \quad \Delta_2^3 U_1 = 0, \quad \Delta_2^3 V_1 = 0.$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = (1 + k) \theta_1,$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial x} + U_1 - (3k + 1) \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \Delta_2 U_1 \frac{\varepsilon^2}{2} + \Delta_2^2 U_1 \frac{\varepsilon^4}{24} = 0,$$

$$\frac{\partial W_0}{\partial y} + V_1 - (3k + 1) \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \Delta_2 V_1 \frac{\varepsilon^2}{2} + \Delta_2^2 V_1 \frac{\varepsilon^4}{24} = 0,$$

$$\Delta_2 W_0 + (1 + k) \theta_1 = 0.$$

Mais, en prenant deux fois de suite les  $\Delta_2$  de la cinquième et de la sixième, on obtient

$$\Delta_2^2 U_1 = 0, \quad \Delta_2^2 V_1 = 0,$$

qui entraînent la seconde et la troisième et permettent de supprimer les derniers termes de la cinquième et de la sixième.

Reprenant une fois les  $\Delta_2$  de celles-ci, et observant que

$$\Delta_2 \frac{\partial W_0}{\partial x} = \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x},$$

$$\Delta_2 \frac{\partial W_0}{\partial y} = \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y}$$

ou, en vertu de la dernière des sept,

$$\Delta_2 \frac{\partial W_0}{\partial x} = -(1+k) \frac{\partial \theta_1}{\partial x},$$

$$\Delta_2 \frac{\partial W_0}{\partial y} = -(1+k) \frac{\partial \theta_1}{\partial y},$$

il vient

$$-(1+k) \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \Delta_2 U_1 = 0,$$

$$-(1+k) \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \Delta_2 V_1 = 0.$$

Par suite, les sept équations à satisfaire pourront s'écrire

$$\Delta_2 \theta_1 = 0, \quad \Delta_2^2 U_1 = 0, \quad \Delta_2^2 V_1 = 0;$$

puis

$$(IX) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = (1+k) \theta_1, \\ \frac{\partial W_0}{\partial x} + U_1 - (2k+1) \varepsilon^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial W_0}{\partial y} + V_1 - (2k+1) \varepsilon^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0, \\ \Delta_2 W_0 + (1+k) \theta_1 = 0. \end{array} \right.$$

Mais je dis maintenant que les quatre dernières entraînent les trois premières, qu'on pourra, par suite, supprimer. Soit, en effet,  $\theta_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $W_0$  une solution quelconque des quatre équations (IX).

Ajoutons la seconde et la troisième respectivement différenciées par rapport à  $x$  et à  $y$ , en ayant égard à la première et à la dernière, on voit qu'il viendra simplement

$$-(2k+1) \varepsilon^2 \Delta_2 \theta_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_2 \theta_1 = 0,$$

c'est-à-dire que la première des trois équations surabondantes est vérifiée. Par suite, la dernière (IX) donne  $\Delta_2^2 W_0$ , et de là résulte que, si l'on prend deux fois de suite les  $\Delta_2$  de la seconde et de la troisième (IX), on trouve la seconde et la troisième des deux équations surabondantes.

Ainsi les quatre fonctions  $\theta_1, U_1, V_1, W_0$  les plus générales possible, susceptibles de satisfaire aux conditions posées, sont les intégrales générales des quatre équations (IX), et réciproquement toute solution de ces quatre équations (IX) satisfait aux conditions voulues.

En résumé : 1° les sept fonctions  $\theta_0, U_0, V_0; \theta_1, U_1, V_1; W_0$  doivent satisfaire aux sept équations à différences partielles (VIII) et (IX); 2° de ces équations résulte que les  $\Delta_2$  des deux fonctions  $\theta_0, \theta_1$  sont nulles et que les  $\Delta_2^2$  des cinq autres fonctions sont nulles; par suite, les formules (II), (III) et (IV) montrent que, pour  $j > 1, U_{2j}, U_{2j+1}; V_{2j}, V_{2j+1}; W_{2j-1}, W_{2j}$  sont nulles et que les fonctions  $\theta_{2j}, \theta_{2j+1}$  le sont pour  $j$  différent de zéro.

Donc les expressions des composantes  $u, v, w$  du déplacement et de la dilatation cubique se réduisent nécessairement à

$$u = U_0 + U_1 z + U_2 \frac{z^2}{2} + U_3 \frac{z^3}{6},$$

$$v = V_0 + V_1 z + V_2 \frac{z^2}{2} + V_3 \frac{z^3}{6},$$

$$w = W_0 + W_1 z + W_2 \frac{z^2}{2} + W_3 \frac{z^3}{6},$$

$$\theta = \theta_0 + \theta_1 z.$$

ou, par les formules (II), (III), (IV), (V), et en ayant égard à (VIII) et (IX), à

$$(X) \left\{ \begin{array}{l} \theta = \theta_0 - \frac{\Delta_1 W_0}{k+1} z, \\ u = U_0 - \left( \frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{(2k+1)}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial x} \right) z \\ \quad + k \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \frac{z^2}{2} + \frac{(3k+2)}{k+1} \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial x} \frac{z^3}{6}, \\ v = V_0 - \left( \frac{\partial W_0}{\partial y} + \frac{(2k+1)}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial y} \right) z \\ \quad + k \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \frac{z^2}{2} + \frac{(3k+2)}{k+1} \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial y} \frac{z^3}{6}, \\ w = W_0 - k \theta_0 z + \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 \frac{z^2}{2}. \end{array} \right.$$

Il en résulte pour les forces élastiques, soit directement au moyen des formules (2), soit au moyen des formules (4) et (VI),

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 2K \left[ k\theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x} - \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x^2} \right) z \right. \\
 &\quad \left. + k \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2} \frac{z^2}{2} + \frac{3k+1}{k+1} \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x^2} \frac{z^3}{6} \right], \\
 N_2 &= 2K \left[ k\theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} - \left( \frac{k+1}{k} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial y^2} \right) z \right. \\
 &\quad \left. + k \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2} \frac{z^2}{2} + \frac{3k+2}{k+1} \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial y^2} \frac{z^3}{6} \right], \\
 T_3 &= K \left[ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2 \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x \partial y} \right) z \right. \\
 &\quad \left. + 2k \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x \partial y} \frac{z^2}{2} + \frac{3k+2}{k+1} \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x \partial y} \frac{z^3}{6} \right], \\
 N_3 &= 0, \quad T_4 = -K \frac{2k+1}{k+1} \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y} (\varepsilon^2 - z^2), \\
 T_2 &= -K \frac{2k+1}{k+1} \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x} (\varepsilon^2 - z^2).
 \end{aligned}
 \tag{XI}$$

Telles sont les expressions algébriques, relativement à  $z$ , les plus générales possible, susceptibles de représenter les déplacements et les forces élastiques dans un cylindre, sur les bases duquel n'agissent pas de pressions. Il résulte des trois dernières formules que la pression normale sur tout élément plan parallèle aux bases est nécessairement nulle, et la pression totale sur de tels éléments est nécessairement une fonction du second degré par rapport à  $z$ .

Si l'on suppose, en particulier,  $\Delta_2 W_0 = \text{const.}$ , on aura en tous les points du cylindre

$$N_3 = 0, \quad T_4 = 0, \quad T_2 = 0.$$

Ce cas particulier a été étudié directement par Clebsch.

Voyons maintenant quelles pressions doivent être exercées sur la surface latérale du cylindre pour que la solution fournie par les équations (VIII), (IX), (X), (XI) satisfasse aux conditions à remplir le long de cette surface.

Soient  $X, Y, Z$  trois fonctions données de  $x, y, z$ , représentant les composantes parallèlement aux axes de la pression exercée au point  $(x, y, z)$  de la surface latérale; soit  $\alpha$  l'angle de la normale à cette surface avec l'axe des  $x$ ; on devra avoir, en tous les points de cette surface,

$$(8) \quad \begin{cases} N_1 \cos \alpha + T_3 \sin \alpha = X, \\ T_3 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha = Y, \\ T_2 \cos \alpha + T_4 \sin \alpha = Z. \end{cases}$$

Comme les fonctions  $N_1, N_2$  et  $T_3$  sont du troisième degré en  $z$ , on voit qu'il faudra qu'il en soit de même des fonctions  $X$  et  $Y$ ; d'autre part, les deux fonctions  $T_2$  et  $T_4$  contenant le facteur  $(\xi^2 - z^2)$ , il devra en être de même de celle de  $Z$ . Ainsi il est d'abord nécessaire que les trois fonctions données  $X, Y, Z$  soient de la forme

$$(9) \quad \begin{cases} X = X'_0 + X'_1 z + X'_2 \frac{z^2}{2} + X'_3 \frac{z^3}{6}, \\ Y = Y'_0 + Y'_1 z + Y'_2 \frac{z^2}{2} + Y'_3 \frac{z^3}{6}, \\ Z = Z'_0 (\xi^2 - z^2). \end{cases}$$

Mais on comprend que cela ne suffise pas et que les fonctions  $X'_0, X'_1, \dots$  ne doivent pas pouvoir être toutes données arbitrairement; et, en effet, les fonctions  $X, Y, Z$  ayant la forme (9), pour que les conditions à la surface (8) soient satisfaites, on devra avoir séparément, à cause de (XI) :

$$(10) \quad \begin{cases} \left( k\theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) \sin \alpha = \frac{X'_0}{2K}, \\ \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x \partial y} \sin \alpha = \frac{X'_2}{2Kk}, \\ \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left( k\theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) \sin \alpha = \frac{Y'_0}{2K}, \\ \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} \sin \alpha = \frac{Y'_2}{2Kk}, \end{cases}$$

$$(11) \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial x^2} \right) \cos \alpha \\ & \quad + \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial x \partial y} \right) \sin \alpha = \frac{-X'_1}{2K}, \\ & \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x \partial y} \sin \alpha = \frac{X'_2 (k+1)}{2K(3k+2)}, \\ & \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x \partial y} \right) \cos \alpha \\ & \quad + \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial y^2} \right) \sin \alpha = \frac{-Y'_1}{2K}, \\ & \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial y^2} \sin \alpha = \frac{Y'_2 (k+1)}{2K(3k+2)}, \\ & \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Delta_2 W_1}{\partial y} \sin \alpha = \frac{-Z'_1 (k+1)}{K(2k+1)}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi il faut : 1° que les trois fonctions  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$  satisfassent en tous les points d'une section droite du cylindre aux trois équations à différences partielles (VIII) et sur le périmètre de la section aux quatre conditions (10); 2° que la fonction  $W_0$  satisfasse, en tous les points de la section du cylindre, à l'équation aux différences partielles du quatrième ordre

$$\Delta_2^2 W_0 = 0,$$

et aux cinq conditions sur le pourtour (11).

Cherchons, d'après cela, combien, parmi les fonctions données  $X'_0$ ,  $X_1$ , ..., peuvent l'être arbitrairement.

Les équations (VIII) sont de même forme que celles que l'on obtient en étudiant le problème du plan élastique, sur le périmètre duquel n'agiraient que des forces situées dans le plan lui-même, de sorte qu'en se déplaçant il conserverait sa forme plane. Les conditions au pourtour seraient la première et la troisième (10), où  $X'_0$ ,  $Y'_0$  seraient les fonctions arbitrairement données; or on sait que le problème est déterminé par ces conditions, c'est-à-dire que les deux fonctions  $U_0$ ,  $V_0$  sont déterminées aux constantes près qui définissent la position de la figure plane considérée, et la fonction  $\theta_0$  est entièrement déterminée. De là résulte: 1° que les fonctions  $X'_0$ ,  $Y'_0$  peuvent être données arbitrai-

rement, 2° mais qu'alors les deux fonctions  $X'_2, Y'_2$  sont entièrement déterminées.

Pour la fonction  $W_0$ , elle satisfait à

$$\Delta_2 \Delta_2 W_0 = 0.$$

Or, il résulte d'un théorème connu, qu'une fonction  $\Delta_2 W_0$  assujettie à satisfaire à cette équation et à la dernière condition (11) est déterminée à une constante près; en sorte qu'en satisfaisant à cette condition où  $Z_0$  est arbitrairement donné, on trouvera

$$(12) \quad \Delta_2 W_0 = f(x, y) + C,$$

$f$  étant une fonction parfaitement déterminée et  $C$  une constante arbitraire. Il résulte de là que les dérivées de  $\Delta_2 W_0$  sont entièrement déterminées et, par suite, en vertu de la seconde et de l'avant-dernière (11), les fonctions  $X'_3, Y'_3$  le sont aussi.

Reste à satisfaire à la première et à la troisième (11), qui peuvent s'écrire, en ayant égard à la seconde et à la quatrième,

$$\left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial W_0}{\partial x^2} \right) \cos \alpha + \frac{\partial_2 W_0}{\partial x \partial y} \sin \alpha = \frac{-X'_1 - \varepsilon^2 \frac{2k+1}{3k+2} X'_3}{2K},$$

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) \sin \alpha = \frac{-Y'_1 - \varepsilon^2 \frac{2k+1}{3k+2} Y'_3}{2K},$$

ou, en portant dans ces équations la valeur trouvée pour  $\Delta_2 W_0$ .

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \sin \alpha \\ & = \frac{-X'_1 - \varepsilon^2 \frac{2k+1}{3k+2} X'_3}{2K} - \frac{k \cos \alpha}{k+1} f(x, y) - \frac{k}{k+1} C \cos \alpha, \\ & \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \sin \alpha \\ & = \frac{-Y'_1 - \varepsilon^2 \frac{2k+1}{3k+2} Y'_3}{2K} - \frac{k \sin \alpha}{k+1} f(x, y) - \frac{k}{k+1} C \sin \alpha. \end{aligned} \right.$$

On peut déterminer la fonction  $W_0$  de façon qu'elle satisfasse à l'équation (12) et à la première des conditions (13) où  $X'_1$  est donné arbitrairement.

Si l'on pose, en effet,

$$W_0 = W'_0 + \frac{kC}{k+1} \frac{x^2}{2},$$

la fonction  $W'_0$  devra satisfaire à l'équation

$$(14) \quad \Delta_2 W'_0 = f(x, y) + \frac{C}{k+1}$$

et à la condition suivante, qui remplace la première (13):

$$\frac{\partial^2 W'_0}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 W'_0}{\partial x \partial y} \sin \alpha = M,$$

$M$  étant la somme des deux premiers termes du second membre de la première (13).

En posant

$$\frac{\partial W'_0}{\partial x} = S,$$

la fonction  $S$  devra satisfaire à

$$\Delta_2 S = \frac{\partial f}{\partial x}$$

et

$$\frac{\partial S}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial S}{\partial y} \sin \alpha = M,$$

et sera, par suite, définie à une constante près, c'est-à-dire qu'elle sera de la forme

$$S = S_0 + C',$$

$S_0$  étant une fonction entièrement déterminée, telle que

$$(15) \quad \Delta_2 S_0 = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Ainsi

$$\frac{\partial W'_0}{\partial x} = S_0 + C',$$



d'où

$$W'_0 = \int_0^x S dx + C'x + \varphi(y),$$

$\varphi(y)$  étant une fonction arbitraire. De là on déduit, en ayant égard à (15),

$$\Delta_2 W'_0 = f(x, y) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

et, à cause de (14),

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{C}{k+1}, \quad \varphi = \frac{C}{k+1} \frac{y^2}{2} + C'x + C''y + C''',$$

C, C', C'' étant trois constantes arbitraires. Ainsi

$$W'_0 = \int_0^x S_0 dx + \frac{C}{k+1} \frac{y^2}{2} + C'x + C''y + C'''$$

et

$$W_0 = \int_0^x S_0 dx + \frac{C}{k+1} \frac{kx^2 + y^2}{2} + C'x + C''y + C''',$$

et est déterminé à quatre constantes près.

Si l'on porte cette expression dans la seconde (13), elle devra être satisfaite d'elle-même; la constante C figurera seule dans le résultat; et comme la fonction  $Y'_3$  est entièrement déterminée, comme nous l'avons vu plus haut, il s'ensuit que la fonction  $Y'_1$  l'est elle-même à la constante C près.

Ainsi, en résumé, sur les dix fonctions de  $x$  et de  $y$  qui entrent dans les expressions (9) des composantes X, Y, Z de la pression sur la surface latérale, on peut s'en donner quatre seulement arbitrairement, à savoir:  $X'_0$ ,  $Y'_0$ ,  $Z'_0$ ;  $X'_1$  [ou  $Y'_1$ , comme on le comprend facilement, puisque nous aurions pu satisfaire directement à la seconde (13) au lieu de satisfaire à la première], et alors toutes les autres sont déterminées ou entièrement ou à une constante près.

De là résulte qu'on ne pourra pas se donner arbitrairement la résultante de translation et le couple résultant des pressions agissant le long de chacune des génératrices de la surface latérale du cylindre; car se donner la résultante de translation ou ses trois composantes équivaldrait à se donner arbitrairement trois relations en termes finis entre

les dix fonctions  $X'_0, X'_1, \dots$ ; se donner l'axe du couple résultant ou ses deux composantes suivant les axes des  $x$  et des  $y$  (celle suivant l'axe des  $z$  est évidemment nulle), ce serait se donner deux autres relations, soit en tout cinq relations arbitraires, tandis qu'on ne peut s'en donner que quatre. De là résulte ce théorème, qui non-seulement rend très-nettement compte des impossibilités qu'on a rencontrées dans le problème des plaques, mais montre, ce qui est important, que ces impossibilités ne tiennent pas à ce qu'on n'a pas poussé assez loin les calculs d'approximation, qu'on les eût rencontrées si loin qu'on les poussât :

*Étant donnés la résultante de translation et le couple résultant d'un système de pressions exercées aux divers points de chacune des génératrices de la surface latérale d'un corps cylindrique, sur la masse et sur les deux bases duquel n'agissent pas de forces, il est, en général, impossible de trouver un mode de répartition de ces pressions tel, que les déplacements et les forces élastiques aux divers points du corps soient exprimables algébriquement par rapport à l'une de leurs coordonnées.*

*Pour que ce soit possible, il faut qu'entre les composantes de la résultante de translation et celles de l'axe du couple résultant sur chaque génératrice il existe une certaine relation.*

On peut énoncer ce théorème encore d'une autre manière. Soient, après la déformation,  $x', y', z'$  les coordonnées du point dont les coordonnées primitives étaient  $x, y, z$ , de telle sorte que si

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z)$$

sont les composantes du déplacement, on ait

$$x' = x + u(x, y, z),$$

$$y' = y + v(x, y, z),$$

$$z' = z + w(x, y, z).$$

Pour avoir les équations de la courbe dans laquelle se transforme une droite  $x = x_0, y = y_0$  primitivement parallèle à l'axe des  $z$  ou aux génératrices du cylindre, on devra éliminer  $z$  entre les trois équations

$$x' = x_0 + u(x_0, y_0, z), \quad y' = y_0 + v(x_0, y_0, z), \quad z' = z + w(x_0, y_0, z)$$

ou, à cause de la dernière, les deux premières deviennent

$$\begin{aligned}x' &= x_0 + u(x_0, y_0, z' - w), \\y' &= y_0 + v(x_0, y_0, z' - w).\end{aligned}$$

Et, comme  $w$  est extrêmement petit, on peut le négliger devant la quantité finie  $z'$  et écrire

$$\begin{aligned}x' &= x_0 + u(x_0, y_0, z'), \\y' &= y_0 + v(x_0, y_0, z'),\end{aligned}$$

qui représentent les projections de la courbe cherchée sur les plans des  $xz$  et des  $yz$ .

Si donc  $u$  et  $v$  sont des fonctions algébriques de degré  $n$ , ces projections sont de forme parabolique.

Ainsi on peut encore énoncer ainsi le théorème précédent :

*Si l'on se donne arbitrairement la résultante de translation et le couple résultant des pressions exercées aux divers points de chacune des génératrices de la surface latérale d'un corps cylindrique sur la masse et les bases duquel n'agissent pas de forces, il est en général impossible de répartir ces pressions de façon que les droites matérielles parallèles aux génératrices du cylindre se transforment en courbes paraboliques, si élevé qu'on suppose le degré de ces courbes.*

Pour que cela soit possible, il faut qu'entre cette résultante de translation et ce couple résultant il existe une relation qui soit identiquement satisfaite sur chaque génératrice.

Enfin, si cette relation est satisfaite, les expressions de  $x'$ ,  $y'$  seront au plus du troisième degré en  $z'$ , comme le montrent les équations (X), de sorte qu'on peut encore ajouter cette autre et importante proposition :

*Quelles que soient les pressions exercées sur la surface latérale d'un cylindre élastique sur la masse entière et sur les bases duquel n'agissent pas de forces, il est toujours impossible qu'une droite matérielle parallèle aux génératrices du cylindre se transforme, par la déformation élastique, en une courbe algébrique d'un degré supérieur au troisième.*

## III.

*Sur un nouveau cas particulier du problème de l'équilibre  
d'un cylindre élastique.*

Il résulte de ce qui précède que, si l'on veut se donner arbitrairement la résultante de translation et le couple résultant des pressions exercées sur chacune des génératrices du cylindre et trouver ensuite un mode de répartition de ces pressions pour lequel le problème de l'équilibre élastique soit *rigoureusement* résolu, il est nécessaire, à la solution particulière qui précède, d'en ajouter une autre; et nous sommes assuré que cette nouvelle solution ne pourra pas être algébrique par rapport à  $z$ .

Soit F une fonction de  $x, y, z$ , remplissant les deux conditions suivantes : 1° de satisfaire en tous les points du corps cylindrique considéré à l'équation

$$\Delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0;$$

2° De satisfaire sur les deux bases, soit pour  $z = \pm z$ , à l'équation

$$(16) \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Il existe une infinité de fonctions remplissant cette double condition; car, pour que la fonction F fût déterminée, il faudrait encore se donner, comme on le montre dans la théorie de la chaleur, l'expression de F ou de  $\frac{\partial F}{\partial n}$  sur la surface latérale ( $n$  désignant la normale en un point de cette surface).

Posons

$$(17) \quad u = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial F}{\partial x}, \quad w = 0, \quad \theta = 0.$$

On vérifiera de suite que les quatre équations à différences partielles (1), qui régissent les quatre fonctions  $u, v, w, \theta$ , sont satisfaites.

Les expressions correspondantes des forces élastiques sont, en vertu des équations (2),

$$(18) \quad \begin{cases} N_1 = 2K \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & N_2 = -2K \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & T_3 = K \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \\ N_3 = 0, & T_1 = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, & T_2 = +\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}. \end{cases}$$

Par suite, en vertu de (16), les pressions sur les deux bases sont nulles. Donc les expressions (18) constituent une nouvelle solution qui, comme la solution algébrique, satisfait aux conditions sur les bases; en ajoutant ces deux solutions, on obtiendra une nouvelle solution, satisfaisant elle-même aux conditions sur les bases et renfermant les arbitraires nécessaires pour que l'on puisse prendre arbitrairement la résultante de translation, et le couple résultant des pressions appliquées sur chaque génératrice. Elle contient même plus d'arbitraires qu'il n'est nécessaire et l'on peut, comme on le verra facilement, particulariser la fonction  $F$  d'une infinité de manières. Parmi les formes qu'on peut lui attribuer, prenons celle-ci

$$F = \zeta \sin \frac{\pi z}{2\epsilon},$$

$\zeta$  étant une fonction des deux seules variables  $x$  et  $y$  satisfaisant à l'équation

$$(19) \quad \Delta_2 \zeta - \frac{\pi^2}{4\epsilon^2} \zeta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\pi^2}{4\epsilon^2} \zeta = 0.$$

Ce qui donnera  $\Delta_2 F = 0$ ; d'ailleurs, la condition sur les bases est remplie d'elle-même, comme le montrent les trois dernières (18). Ainsi on peut prendre pour  $\zeta$  toute solution de l'équation à différences partielles ci-dessus.

Si l'on ajoute les expressions (17) et (18) des déplacements et des forces élastiques, après y avoir remplacé  $F$  par sa valeur (19), à celles fournies par les équations (X) et (XI), et qu'on pose, pour simplifier

$$\begin{aligned} u &= u' + u'', & v &= v' + v'', & w &= w' + w'', & \zeta &= \zeta' + \zeta'', \\ N_i &= N'_i + N''_i, & T_i &= T'_i + T''_i, & (i &= 1, 2, 3), \end{aligned}$$

il viendra

$$(XII) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = U_0 + k \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} \frac{z^2}{2}, \quad v' = V_0 + k \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} \frac{z^2}{2}, \\ w' = -k \vartheta_0 z, \quad \zeta' = \Theta_0, \\ N'_1 = 2K \left( k \vartheta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x} + k \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x^2} \frac{z^2}{2} \right), \\ N'_2 = 2K \left( k \vartheta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} + k \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial y^2} \frac{z^2}{2} \right), \\ T'_3 = K \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} + 2k \frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial x \partial y} \frac{z^2}{2} \right), \\ N'_3 = T'_1 = T'_2 = 0; \end{array} \right.$$

$$u'' = - \left( \frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial x} \right) z + \frac{3k+2}{k+1} \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial x} \frac{z^3}{6} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon},$$

$$v'' = - \left( \frac{\partial W_0}{\partial y} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial y} \right) z + \frac{3k+2}{k+1} \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial y} \frac{z^3}{6} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon},$$

$$w'' = W_0 + \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 \frac{z^2}{2};$$

$$(XIII) \quad \left\{ \begin{array}{l} N''_1 = 2K \left[ - \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial x^2} \right) z \right. \\ \quad \left. + \frac{3k+2}{k+1} \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial x^2} \frac{z^3}{6} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ N''_2 = 2K \left[ - \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial y^2} \right) z \right. \\ \quad \left. + \frac{3k+2}{k+1} \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial y^2} \frac{z^3}{6} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ T''_3 = K \left[ - 2 \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} + \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial x \partial y} \right) z \right. \\ \quad \left. + \frac{6k+4}{k+1} \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial x \partial y} \frac{z^3}{6} + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ N''_3 = 0, \\ T''_1 = K \left[ - \frac{2k+1}{k+1} \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial y} (\varepsilon^2 - z^2) - \frac{\pi}{2\varepsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ T''_2 = K \left[ - \frac{2k+1}{k+1} \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial x} (\varepsilon^2 - z^2) + \frac{\pi}{2\varepsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right]. \end{array} \right.$$

Sur la surface latérale, on aurait, en général,

$$(20) \quad \begin{cases} N_1 \cos \alpha + T_3 \sin \alpha = X, \\ T_3 \cos \alpha + N_2 \sin \alpha = Y, \\ T_2 \cos \alpha + T_1 \sin \alpha = Z, \end{cases}$$

$X, Y, Z$  étant des fonctions données. Pour que le problème puisse être résolu rigoureusement, il faut d'abord que  $X, Y, Z$  soient de la forme des seconds membres de (9), complétés par trois termes de la forme  $X'_{iv} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, Y'_{iv} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, Z'_{iv} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon}$ ; et alors, en répétant la discussion de la fin du § I, on verrait qu'on pourrait prendre ici arbitrairement cinq des douze fonctions  $X_i, Y_i, Z_i$  des deux variables  $x, y$  entrant dans les expressions de  $X, Y, Z$ , à savoir : quatre de celles qui forment les seconds membres de (9) et l'une de celles  $X'_{iv}, Y'_{iv}, Z'_{iv}$ ; on pourra, par suite, *étant donnés arbitrairement la résultante de translation et le couple résultant des forces extérieures agissant sur chacune des génératrices du cylindre, trouver un mode de répartition de ces forces pour lequel le problème de l'équilibre élastique sera rigoureusement résolu par les formules (XII) et (XIII).*

Pour trouver les conditions à la surface qui régissent la résultante de translation et le couple résultant, désignons par  $X_0, Y_0, Z_0$  les projections sur les axes de la résultante de ces forces, et par  $X_1, Y_1$  la somme de leurs moments par rapport à deux axes parallèles aux  $x$  et aux  $y$  menés par un point de la génératrice que l'on considère, en sorte que

$$(XIV) \quad \begin{cases} X_0 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} X dz, & Y_0 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Y dz, & Z_0 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Z dz, \\ X_1 = - \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} Y z dz, & Y_1 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} X z dz. \end{cases}$$

Les deux premières (20), multipliées par  $dz$  et intégrées entre  $-\varepsilon$  et  $+\varepsilon$ , donnent, en remplaçant les  $N_i$  et  $T_i$  par leurs valeurs (XII)

et (XIII),

$$(XIV) \left\{ \begin{aligned} & \left[ 2\varepsilon \left( k\theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x} \right) + k \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x^2} \frac{\varepsilon^3}{3} \right] \cos \alpha \\ & + \left[ \varepsilon \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) + k \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \frac{\varepsilon^3}{3} \right] \sin \alpha = \frac{X_0}{2K}, \\ & \left[ \varepsilon \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) + k \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial x \partial y} \frac{\varepsilon^3}{3} \right] \cos \alpha \\ & + \left[ 2\varepsilon \left( k\theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) + k \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial y^2} \frac{\varepsilon^3}{3} \right] \sin \alpha = \frac{Y_0}{2K}; \end{aligned} \right.$$

puis la troisième (20), multipliée par  $dz$  et les deux premières, multipliées par  $z dz$  et intégrées, donnent

$$(XV) \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{2(2k+1)}{3(k+1)} \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \cos \alpha + \left[ \frac{2(2k+1)}{3(k+1)} \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \sin \alpha = \frac{-Z_0}{2K}, \\ & \left[ - \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) \frac{2\varepsilon^3}{3} - \frac{17k+8}{k+1} \frac{\partial^2 \Delta_2 W_0}{\partial x^2} \frac{2\varepsilon^5}{15} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{8\varepsilon^3}{\pi^2} \right] \cos \alpha \\ & + \left[ - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \frac{2\varepsilon^3}{3} - \frac{17k+8}{k+1} \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial x \partial y} \frac{\varepsilon^5}{15} + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \frac{4\varepsilon^3}{\pi^2} \right] \sin \alpha = \frac{Y_1}{2K}, \\ & \left[ - \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \frac{2\varepsilon^3}{3} - \frac{17k+8}{k+1} \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial x \partial y} \frac{\varepsilon^5}{15} + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \frac{4\varepsilon^3}{\pi^2} \right] \cos \alpha \\ & + \left[ - \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) \frac{2\varepsilon^3}{3} - \frac{17k+8}{k+1} \frac{\partial^2 \Delta_1 W_0}{\partial y^2} \frac{2\varepsilon^5}{15} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{8\varepsilon^3}{\pi^2} \right] \sin \alpha = \frac{-X_1}{2K}. \end{aligned} \right.$$

En résumé, le problème à résoudre consiste : 1° à déterminer les trois fonctions  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$  de façon à satisfaire, en tous les points d'une section droite du cylindre, aux équations à différences partielles (VIII), et, sur le pourtour, aux deux conditions (XIV); 2° à déterminer les deux fonctions  $W_0$  et  $\zeta$ , de manière que la première satisfasse, dans toute l'étendue de la section droite, à l'équation du quatrième ordre  $\Delta_2^2 W_0 = 0$  et la seconde à l'équation du deuxième ordre (19), et que, sur le pourtour, elles satisfassent aux trois conditions (XV).

On voit que le problème se sépare en deux; la recherche des trois fonctions  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$  et celle des deux fonctions  $W_0$  et  $\zeta$  constituent deux questions absolument indépendantes.

Si la résultante de translation des forces agissant sur l'une quel-



conque des génératrices de la surface latérale est dirigée suivant cette génératrice elle-même, c'est-à-dire si  $X_0 = 0$ ,  $Y_0 = 0$ , on voit qu'on satisfait à toutes les conditions que doivent remplir les fonctions  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$  en faisant  $U_0 = 0$ ,  $V_0 = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ , et, comme le problème de la recherche de ces fonctions est déterminé, il s'ensuit qu'elles sont effectivement nulles.

## IV.

*Application des résultats qui précèdent aux plaques minces.*

Appliquons maintenant les résultats rigoureux qui précèdent aux plaques minces, c'est-à-dire au cas où la hauteur  $2\varepsilon$  du cylindre considéré, et, par suite, la coordonnée  $z$ , deviennent extrêmement petites.

Les formules (XII) deviennent, en négligeant les quantités de l'ordre de  $z^2$  ou  $\varepsilon^2$  devant celles ne contenant pas ces lettres,

$$\begin{aligned} u' &= U_0, & v' &= V_0, & w' &= -k\theta_0 z, & \zeta' &= \theta_0, \\ N'_1 &= 2K \left( k\theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x} \right), & N'_2 &= 2K \left( k\theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right), \\ T'_3 &= K \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

D'ailleurs, les fonctions  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$  doivent satisfaire aux équations (VIII) qui ne changent pas et aux conditions à la surface (XIV) qui se simplifient et deviennent

$$(22 \text{ bis}) \quad \begin{cases} 2 \left( k\theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) \sin \alpha = \frac{X_0}{2K\varepsilon}, \\ \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left( k\theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right) \sin \alpha = \frac{Y_0}{2K\varepsilon}. \end{cases}$$

Ce premier problème, consistant à chercher les trois fonctions  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$ , est tout à fait de même nature que celui du plan élastique.

Les formules (XIII) donnent, en négligeant les termes de l'ordre

de  $z^3$  ou  $\varepsilon^3$  devant ceux du premier ordre en  $z$  ou  $\varepsilon$ ,

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} u'' = -\frac{\partial W_0}{\partial x} z + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ v'' = -\frac{\partial W_0}{\partial x} z - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ w'' = W_0 + \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 \frac{z^2}{2}, \\ N_1'' = 2K \left[ -\left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) z + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ N_2'' = 2K \left[ -\left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) z - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ T_3'' = K \left[ -2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} z + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ N_3'' = 0, \\ T_1'' = K \left[ -\frac{2k+1}{k+1} \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x} (\varepsilon^2 - z^2) - \frac{\pi}{2\varepsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ T_2'' = K \left[ -\frac{2k+1}{k+1} \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x} (\varepsilon^2 - z^2) + \frac{\pi}{2\varepsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right]. \end{array} \right.$$

D'ailleurs, les fonctions  $W_0$  et  $\zeta$  satisfont à

$$(24) \quad \Delta_2^2 W_0 = 0$$

et

$$(25) \quad \Delta_2 \zeta - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2} \zeta = 0,$$

et aux conditions à la surface (XV).

Dans les deux dernières (XV), on peut négliger le terme en  $\varepsilon^3$  devant celui en  $\varepsilon^2$ ; il est d'ailleurs plus commode de remplacer les composantes  $X_1, Y_1$  du couple résultant des forces extérieures parallèlement aux axes de coordonnées par ses composantes  $\bar{\varepsilon}$  et  $\bar{\varkappa}$  suivant la tangente et la normale à la section droite du cylindre. On aura

$$\bar{\varkappa} = X_1 \cos \alpha + Y_1 \sin \alpha,$$

$$\bar{\varepsilon} = -X_1 \sin \alpha + Y_1 \cos \alpha.$$

Par suite, les conditions à la surface deviendront

$$(26) \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{2}{3} \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] \cos \alpha \\ & + \left[ \frac{2}{3} \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^3 \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] \sin \alpha = -\frac{Z_0}{2K}, \\ & \left[ \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \frac{2\varepsilon^3}{3} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2} \right] \cos 2\alpha \\ & + \left[ \left( \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) \frac{\varepsilon^3}{3} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2} \right] \sin 2\alpha = \frac{\delta \zeta}{2K}, \\ & \left( \frac{1}{2} - \frac{k}{k+1} \right) \frac{2\varepsilon^2}{3} \Delta_2 W_0 \\ & + \left[ \left( \frac{\partial W_0}{\partial y^2} - \frac{\partial W_0}{\partial x^2} \right) \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \frac{8\varepsilon^2}{\pi^2} \right] \cos 2\alpha, \\ & \left[ -\frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \frac{2\varepsilon^3}{3} + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \frac{4\varepsilon^2}{\pi^2} \right] \sin 2\alpha = \frac{\bar{\zeta}}{2K}, \end{aligned} \right.$$

où  $Z_0$  peut être appelé *l'effort tranchant*,  $\bar{\zeta}$  *le moment de flexion* et  $\delta \zeta$  *le moment de torsion*.

On voit, par les expressions  $u''$ ,  $v''$ ,  $w''$ , qu'une ligne primitivement droite et normale au plan moyen ne reste pas droite et normale à cette surface déformée, mais se transforme en une ligne de forme sinusoïde coupant à angle droit les deux bases déformées de la plaque. Si l'on faisait  $\zeta = 0$ , on retrouverait que ces lignes restent droites et normales à la surface moyenne.

Les équations (23) et (26) ne prennent un sens net que si l'on connaît les grandeurs relatives des fonctions  $W_0$  et  $\zeta$ . Les équations indéfinies (24) et (25) auxquelles elles satisfont, si elles étaient seules, n'apprendraient rien sur leurs grandeurs respectives; car ces équations ne changent pas si l'on multiplie chacune d'elles par une constante quelconque. Mais de l'équation en  $\zeta$  on peut déduire des relations de grandeur entre cette fonction et ses dérivées de divers ordres.

Posons

$$x = \frac{2\varepsilon}{\pi} \alpha', \quad y = \frac{2\varepsilon}{\pi} \beta',$$

l'équation en  $\zeta$ , qui est

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{\pi^2}{4 \varepsilon^2} \zeta = 0,$$

se transforme en

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y'^2} - \zeta = 0.$$

Donc  $\zeta$  est une fonction de  $x'$  et de  $y'$ , c'est-à-dire de  $\frac{\pi x}{2\varepsilon}$  et  $\frac{\pi y}{2\varepsilon}$ , ou, si l'on veut, de  $\frac{x}{\varepsilon}$  et de  $\frac{y}{\varepsilon}$ . De là, on conclut pour l'une de ses dérivées premières, par exemple celle relative à  $x$ ,

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\zeta}{dx'};$$

et, comme la dérivée  $\frac{d\zeta}{dx'}$  est en général de même ordre de grandeur que la fonction elle-même, il s'ensuit que  $\frac{d\zeta}{dx}$  sera en général incomparablement plus grand que  $\zeta$ ; de même les dérivées secondes sont multipliées par  $\frac{1}{\varepsilon^2}$ , et, par suite, sont, en général, incomparablement plus grandes encore.

Cela posé, ce sont les conditions à la surface (26) qui indiquent les grandeurs relatives des deux fonctions  $W_0$  et  $\zeta$ .

Observons que, d'après le théorème de Poisson, c'est-à-dire si l'on suppose les actions tangentielles développables suivant les puissances de  $z$ , l'effort tranchant  $Z_0$  doit être de l'ordre de  $\varepsilon^2 W_0$ .

Car l'action verticale, par unité de surface, sur un élément superficiel pris sur le cylindre terminant la plaque, s'annule pour  $z = \pm \varepsilon$ ; elle contient donc le facteur  $(\varepsilon^2 - z^2)$  et son intégrale prise de  $-\varepsilon$  à  $+\varepsilon$ , c'est-à-dire  $Z_0$ , doit nécessairement contenir  $\varepsilon^3$  en facteur.

Mais, si l'on n'admet pas *a priori* la possibilité du développement dont il s'agit, il n'est plus évident ni certain que l'effort tranchant ait ce degré de petitesse, et nous allons voir qu'il peut ne pas l'avoir.

Examinons directement, d'après nos équations, quel doit être le degré de grandeur de la fonction  $\zeta$ . D'abord, pour  $\varepsilon = 0$ , on a, en vertu de (25),  $\zeta = 0$ ; par suite, à cause de la première (26),  $Z_0 = 0$ . Ainsi  $Z_0$

est au moins de l'ordre de  $\varepsilon W_0$ ; s'il était de cet ordre, il en serait de même des dérivées  $\frac{d\zeta}{dx}$ ,  $\frac{d\zeta}{dy}$  d'après la première (26); par suite, les dérivées secondes de  $\zeta$  seraient en général de l'ordre de  $W_0$ , ce qui est évidemment impossible; car, dans les deux dernières (26), tous les termes contenant le facteur  $\varepsilon^3$  deviendraient négligeables, et ces deux équations ne pourraient plus être satisfaites en même temps que celle (25).

Donc la fonction  $Z_0$  est au moins de l'ordre de  $\varepsilon^2 W_0$ ; remarquons d'ailleurs que, si elle est de cet ordre, il en sera de même des dérivées  $\frac{d\zeta}{dx}$ ,  $\frac{d\zeta}{dy}$ , à cause de la première (26); par suite, les dérivées secondes de la fonction  $\zeta$  seront en général de l'ordre de  $\varepsilon W_0$ , et, comme dans les deux dernières (26) elles sont multipliées par  $\varepsilon^2$ , elles fournissent des termes comparables à ceux en  $\varepsilon^3$  qui entrent déjà dans ces équations.

Ainsi toutes les conditions du problème peuvent parfaitement être remplies,  $Z_0$  étant de l'ordre de  $\varepsilon^2$ ; il n'est pas nécessaire que cette fonction soit de l'ordre  $\varepsilon^3$ , comme on l'admet implicitement si on la suppose développable suivant les puissances de  $z$ .

Si elle est de l'ordre de  $\varepsilon^2$ , les termes en  $W_0$  peuvent, du moins comme première approximation, être négligés dans la première condition à la surface, ce qui sépare la recherche de la fonction  $\zeta$  de celle de la fonction  $W_0$  et simplifie beaucoup le problème.

Les derniers termes de l'expression des déplacements  $u''$  et  $v''$  sont alors aussi de l'ordre de  $\varepsilon^2$ ; par conséquent, la forme sinusoidale qui affectent les petites lignes primitivement normales au plan moyen ont une flèche *extrêmement petite et cependant cette légère courbure donne lieu à un effort tranchant fort considérable*. Cela tient à ce qu'il entre dans nos expressions une fonction du rapport  $\frac{z}{\varepsilon}$ , rapport fini, quoique  $z$  et  $\varepsilon$  soient des quantités très-petites.

Dans le cas particulier où  $Z_0$  serait de l'ordre de  $\varepsilon^3 W_0$  ou d'un ordre plus élevé ou nul (c'est-à-dire si les pressions sur les surfaces latérales étaient normales à cette surface), alors les dérivées  $\frac{d\zeta}{dx}$ ,  $\frac{d\zeta}{dy}$  seraient, en vertu de la première (26), de l'ordre de  $\varepsilon^3 W_0$ ; par suite, tous les termes de la première condition à la surface devraient être conservés;

mais dans les deux derniers on pourrait alors négliger les termes provenant de la fonction  $\zeta$ , ces termes étant en général de l'ordre de  $\varepsilon^4$ .

La recherche des deux fonctions  $W_0$  et  $\zeta$  se séparera donc encore; on devra dans ce cas commencer par chercher la fonction  $W_0$  de façon qu'elle satisfasse à l'équation  $\Delta_2^2 W_0 = 0$ , et aux deux dernières conditions (21) où l'on aura supprimé les termes contenant  $\zeta$ . Ce problème est possible et déterminé; puis, la fonction  $W_0$  connue, on en portera la valeur dans la première condition à la surface et l'on déterminera la fonction  $\zeta$  de manière à satisfaire à cette unique condition et à l'équation (24).

## V.

### *Introduction des forces agissant sur la masse de la plaque.*

Jusqu'ici nous avons négligé les forces telles que la pesanteur agissant sur la masse entière de la plaque. Pour les introduire sans recommencer tous les calculs, nous emploierons une méthode qui est une sorte de généralisation de la méthode de la variation des constantes arbitraires; reprenons un instant pour les composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  des déplacements les expressions (X), en y adjoignant celles (17) où  $F = \zeta \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}$ ; mais supposons que les fonctions  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$ ,  $W_0$ ,  $\zeta$  soient entièrement indéterminées (c'est-à-dire ne satisfassent plus aux équations qui les régissaient quand on faisait abstraction des forces extérieures agissant sur la masse de la plaque) et cherchons à déterminer, s'il est possible, ces fonctions de manière à satisfaire aux nouvelles équations d'équilibre résultant de l'introduction des forces extérieures, sans cesser de satisfaire à la condition que les pressions sur les deux bases soient nulles.

On observera d'abord que des expressions (X) de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\theta$ , et en vertu des formules (2), on déduit pour les pressions  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ ;  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ , les expressions (XI), quelles que soient les fonctions  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $W_0$ ,  $\theta_0$ , quand bien même elles ne satisfont plus aux équations à différences partielles qui les régissaient avant l'introduction des forces proportionnelles aux masses. Donc, quelles que soient ces fonctions, la pression  $N_3$  sera nulle dans toute l'étendue de la plaque et, en particulier, sur les deux bases, et les pressions  $T_1$  et  $T_2$  le seront également sur les bases.

Maintenant des expressions (17) qui, pour  $F = \zeta \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}$ , deviennent

$$(27) \quad u = \frac{d\zeta}{dy} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \quad v = -\frac{d\zeta}{dx} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \quad w = 0, \quad \theta = 0,$$

on déduit par les formules (2), et cela *quelle que soit* la fonction  $\zeta$ , pour les forces élastiques les expressions

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = 2K \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ N_2 = -2K \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ T_3 = K \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}; \\ T_1 = K \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\pi}{2\varepsilon} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ T_2 = K \frac{\partial \zeta}{\partial y} \frac{\pi}{2\varepsilon} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ N_3 = 0; \end{array} \right.$$

en sorte que les trois dernières s'annulent également sur les deux bases.

Ainsi, en prenant pour  $u, v, w$  la somme des expressions (X) et (27) et laissant entièrement arbitraires toutes les fonctions qui y entrent, on obtiendra pour les forces élastiques la somme des expressions (XI) et (28) et, par suite, on satisfera à la condition d'annuler les pressions sur les deux bases. Reste donc seulement à trouver les nouvelles équations aux dérivées partielles qui régissent les fonctions  $U_0, V_0, W_0, \theta_0$  et  $\zeta$  par suite de l'introduction des actions telles que la pesanteur. Les formules obtenues sont, aux quantités près de l'ordre de  $\varepsilon^3$ ,

$$(28 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J} = \theta_0 - \frac{\Delta_1 W_0}{k+1} \zeta, \\ u = U_0 - \frac{\partial W_0}{\partial x} \zeta + k \frac{\partial \theta_0}{\partial x} \frac{z^2}{2} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ v = V_0 - \frac{\partial W_0}{\partial y} \zeta + k \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \frac{z^2}{2} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ w = W_0 - K \theta_0 \zeta + \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 \frac{z^2}{2}. \end{array} \right.$$

De là on conclut, par les formules (2) et quelles que soient les fonc-

tions indéterminées  $\theta_0, U_0, V_0, W_0, \zeta,$

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} N_1 = 2K \left[ k\theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x} - \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right) \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ N_2 = 2K \left[ k\theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} - \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} \right) \zeta - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ T_3 = K \left[ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \zeta + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ N_3 = 0, \\ T_1 = K \left[ -\frac{2k+1}{k+1} \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y} (\xi^2 - \zeta^2) - \frac{\pi}{2\varepsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\ T_2 = K \left[ -\frac{2k+1}{k+1} \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x} (\xi^2 - \zeta^2) + \frac{\pi}{2\varepsilon} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right]. \end{array} \right.$$

Observons qu'il y a entre  $u, v, w, \theta$  une relation que l'introduction des forces extérieures ne modifie pas : c'est celle  $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ , qui définit la dilatation cubique. Pour qu'elle soit satisfaite par les expressions (28), on vérifiera facilement qu'il faut et il suffit que

$$(30) \quad (k+1)\theta_0 = \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y}.$$

Voilà donc une première relation nécessaire entre les fonctions indéterminées qui entrent dans les équations (28) et (29).

Maintenant les équations d'équilibre sont, en appelant  $X', Y', Z'$  les composantes, suivant les axes, de la force rapportée à l'unité de volume, agissant en un point quelconque de la plaque,

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + X' = 0, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + Y' = 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + Z' = 0. \end{array} \right.$$

Soient  $A_0, B_0, C_0$  les projections de la résultante de translation des forces aux composantes  $X', Y', Z'$ , agissant sur les divers points d'une petite ligne parallèle à l'axe des  $z$ , et  $A_1, B_1$  les sommes des moments de ces forces par rapport à des axes parallèles aux  $x$  et aux  $y$ , menés



par le milieu de cette petite ligne, en sorte que

$$(32) \quad \begin{cases} A_0 = \int X' dz, & B_0 = \int Y' dz, & C_0 = \int Z' dz, \\ A_1 = -\int Y' z dz, & B_1 = \int X' z dz. \end{cases}$$

les intégrales étant prises de  $-\varepsilon$  à  $+\varepsilon$ .

Par suite, si l'on multiplie les trois équations ci-dessus par  $dz$  et qu'on intègre de  $-\varepsilon$  à  $+\varepsilon$ , en observant que  $N_3, T_3, T_1$  s'annulent pour  $z = \pm \varepsilon$ , on obtient

$$(33) \quad \begin{cases} \frac{\partial f N_1 dz}{\partial x} + \frac{\partial f T_3 dz}{\partial y} + A_0 = 0, \\ \frac{\partial f T_3 dz}{\partial x} + \frac{\partial f N_2 dz}{\partial y} + B_0 = 0, \\ \frac{\partial f T_2 dz}{\partial x} + \frac{\partial f T_1 dz}{\partial y} + C_0 = 0. \end{cases}$$

En multipliant ensuite les deux premières par  $z dz$   
et intégrant entre les limites  $-\varepsilon$  et  $+\varepsilon$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial f N_1 z dz}{\partial x} + \frac{\partial f T_3 z dz}{\partial y} - \int T_2 dz + B_1 = 0, \\ \frac{\partial f T_3 z dz}{\partial x} + \frac{\partial f N_2 z dz}{\partial y} - \int T_1 dz - A_1 = 0. \end{cases}$$

Les expressions (29) donnent d'ailleurs

$$(34) \quad \begin{cases} \int N_1 dz = 4K\varepsilon \left( k\theta_0 + \frac{\partial U_0}{\partial x} \right), \\ \int N_2 dz = 4K\varepsilon \left( k\theta_0 + \frac{\partial V_0}{\partial y} \right), \\ \int T_3 dz = 4K\varepsilon \left( \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} \right); \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} \int N_1 z dz = -2K \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial x^2} \right) \frac{2\varepsilon^3}{3} + \frac{16K\varepsilon^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}, \\ \int N_2 z dz = -2K \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} \right) \frac{2\varepsilon^3}{3} + \frac{16K\varepsilon^2}{\sigma^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}, \\ \int T_3 z dz = -2K \left[ \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial y} \frac{2\varepsilon^3}{3} + \frac{8K\varepsilon^2}{\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) \right], \\ \int T_1 dz = -2K \frac{2k+1}{k+1} \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial y} \frac{2\varepsilon^3}{3} - 2K \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \int T_2 dz = -2K \frac{2k+1}{k+1} \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial x} \frac{2\varepsilon^3}{3} + 2K \frac{\partial \xi}{\partial y}. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs dans les deux premières équations (33), il vient

$$(35) \quad \begin{cases} (2k+1) \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + \Delta_2 U_0 + \frac{A_0}{2K\varepsilon} = 0, \\ (2k+1) \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \Delta_2 V_0 + \frac{B_0}{2K\varepsilon} = 0, \end{cases}$$

à laquelle il faut joindre celle (30) :

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} = (k+1) \theta_0.$$

Les trois fonctions  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$  doivent satisfaire en tous les points de la plaque à ces trois équations (qui se réduisent à celles précédemment trouvées, lorsque  $A_0 = 0$ ,  $B_0 = 0$ ), et en outre, sur le contour de la plaque, aux deux conditions (XIV) qui ne changent pas, les expressions des pressions  $N_i$  et  $T_i$  ayant conservé la même forme qu'avant l'introduction des forces extérieures.

Si l'on porte les intégrales ci-dessus dans la troisième équation (33), elle devient

$$(36) \quad \Delta_2^2 W_0 = \frac{3}{4K} \frac{k+1}{(2k+1)} \frac{1}{\varepsilon^3} C_0.$$

Enfin, si on les porte dans les deux dernières, elles deviennent après réduction

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{\partial \left( \Delta_2 \zeta - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2} \zeta \right)}{\partial y} + \frac{\pi^2}{8K} \frac{1}{\varepsilon^2} B_1 = 0, \\ \frac{\partial \left( \Delta_2 \zeta - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2} \zeta \right)}{\partial x} + \frac{\pi^2}{8K} \frac{1}{\varepsilon^2} A_1 = 0. \end{cases}$$

Pour que ces deux équations soient compatibles, il faut que les deux fonctions données  $A_1$  et  $B_1$  satisfassent à la condition

$$(38) \quad \frac{\partial B_1}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0.$$

Cette restriction n'a aucun inconvénient au point de vue des applications; car  $A_1$  et  $B_1$  sont habituellement nuls; si on ne rencontre pas

cette restriction dans les théories existantes, c'est uniquement parce que dans ces théories on ne satisfait pas à toutes les équations du problème.

Si l'on pose

$$B_1 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad A_1 = \frac{\partial F}{\partial x},$$

F étant une fonction donnée, les deux équations se réduisent à

$$(39) \quad \Delta_2 \zeta - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2} \zeta + \frac{\pi^2}{8K\varepsilon^2} F = 0.$$

Les deux fonctions  $W_0$  et  $\zeta$  doivent satisfaire en tous les points de la plaque aux deux équations (36) et (39), se réduisant à celles précédemment trouvées si l'on fait abstraction des forces extérieures, et, sur le pourtour, aux conditions (XV) qui ne changent pas, les expressions des pressions n'ayant pas changé de forme par suite de l'introduction des forces extérieures.

### *Équations des mouvements vibratoires d'une plaque élastique.*

Maintenant que nous avons les équations complètes de l'équilibre, le principe de d'Alembert permet d'en déduire les équations des mouvements vibratoires.

Il faut, dans les équations (34), remplacer respectivement  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  par

$$X' = \delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad Y' = \delta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad Z' = \delta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$\delta$  étant la densité de la matière qui forme la plaque.

Par suite, les équations (32) montrent qu'on devra remplacer  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ , respectivement par

$$\begin{aligned} A_0 - \delta \int \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz, \quad B_0 - \delta \int \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dz, \quad C_0 - \delta \int \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz, \\ A_1 + \delta \int z \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dz, \quad B_1 - \delta \int z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz, \end{aligned}$$

les  $f$  étant toujours prises de  $-z$  à  $+z$ .

Or les expressions (28) donnent

$$f u dz = 2\varepsilon U_0, \quad f v dz = 2\varepsilon V_0, \quad f w dz = 2\varepsilon W_0,$$

en négligeant, dans cette dernière, le terme en  $\varepsilon^2$ .

Puis

$$f u z dz = -\frac{\partial W_0}{\partial x} \frac{2\varepsilon^3}{3} + \frac{8\varepsilon^2}{\pi^2} \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$f v z dz = -\frac{\partial W_0}{\partial y} \frac{2\varepsilon^3}{3} - \frac{8\varepsilon^2}{\pi^2} \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Par suite, en observant que  $\int \frac{d^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int$ , il faut remplacer  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  par

$$A_0 - 2 \partial \varepsilon \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}, \quad B_0 - 2 \partial \varepsilon \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2}, \quad C_0 - 2 \partial \varepsilon \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2},$$

$$A_1 - \frac{2 \partial \varepsilon^3}{3} \frac{\partial^3 W_0}{\partial y \partial t^2} - \frac{8 \partial \varepsilon^2}{\pi^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t^2},$$

$$B_1 + \frac{2 \partial \varepsilon^3}{3} \frac{\partial^3 W_0}{\partial x \partial t^2} - \frac{8 \partial \varepsilon^2}{\pi^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial t^2}.$$

Les équations (28) deviennent ainsi

$$(40) \quad \begin{cases} (2k+1) \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + \Delta_2 U_0 - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} + \frac{A_0}{2K\varepsilon} = 0, \\ (2k+1) \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} + \Delta_2 V_0 - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2} + \frac{B_0}{2K\varepsilon} = 0, \\ \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial x} = (k+1) \Theta_0, \end{cases}$$

avec les conditions à la surface (XIV) et, en outre, les conditions initiales consistant en ce que pour  $t = 0$ ,  $U_0$ ,  $V_0$  et  $\frac{\partial U_0}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial V_0}{\partial t}$  doivent être égales à des fonctions arbitrairement données de  $x$  et de  $y$ .

Les équations (36) deviennent

$$(41) \quad \Delta_2^2 W_0 + \frac{3 \partial (k+1)}{2K(2k+1)} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} - \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)} \frac{1}{\varepsilon^2} C_0 = 0.$$

Quant aux équations (37) elles deviennent, dans le cas du mouvement,

$$\frac{\partial \left( \Delta^2 \zeta - \frac{\pi^2}{4 \varepsilon^2} \zeta \right)}{\partial y} + \frac{\pi^2 \zeta \varepsilon}{12 K} \frac{\partial^2 W_0}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial}{K} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial t^2} + \frac{\pi^2}{8 K} \frac{1}{\varepsilon^2} B = 0,$$

$$\frac{\partial \left( \Delta_1 \zeta - \frac{\pi^2}{4 \varepsilon^2} \zeta \right)}{\partial x} - \frac{\pi^2 \zeta \varepsilon}{12 K} \frac{\partial^2 W_0}{\partial y \partial t^2} - \frac{\partial}{K} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial t^2} + \frac{\pi^2}{8 K} \frac{1}{\varepsilon^2} A = 0,$$

toujours avec les trois conditions à la surface (XV) que les deux fonctions  $W_0$  et  $\zeta$  devront remplir; en outre, elles devront ici satisfaire aux conditions initiales, consistant en ce que, pour  $t=0$ ,  $W_0$  et  $\frac{\partial W_0}{\partial t}$  sont des fonctions données de  $x$  et  $y$  dans toute l'étendue du plan moyen.

Je dis que les seconds et troisièmes termes des deux dernières équations en  $\zeta$  sont négligeables.

En effet, nous avons vu que les dérivées  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$  sont au moins de l'ordre de  $\varepsilon^2 W_0$ ; donc les troisièmes termes sont négligeables devant les seconds; mais ceux-ci sont eux-mêmes négligeables devant les premiers: car, en vertu de l'équation (41),  $\frac{1}{K} \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2}$  est de l'ordre de  $\varepsilon^2 \Delta_2^2 W_0$  ou de l'ordre de  $\varepsilon^2 W_0$ : donc les seconds termes des dernières équations sont de l'ordre de  $\varepsilon^3 W_0$ . Or les dérivées  $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$  étant, en vertu de la première des conditions à la surface (XV), au plus de ce même ordre, les premiers termes des dernières équations sont au plus de l'ordre de  $\varepsilon W_0$ .

Ainsi on peut réduire ces deux équations à ce qu'elles sont dans le cas de l'équilibre, en sorte que, la condition (38) étant supposée remplie, la fonction  $\zeta$  satisfait, dans le cas du mouvement comme dans celui de l'équilibre, à l'équation (39).

#### *Transformation des équations en coordonnées curvilignes.*

Pour compléter cette théorie et résumer les diverses équations obtenues, transformons-les en coordonnées curvilignes, ce qui est utile dans la plupart des applications.

Soient  $\rho$  et  $\rho_1$  les paramètres de deux systèmes de cylindres orthogonaux, dont les génératrices sont parallèles à l'axe des  $z$ , en sorte qu'un point quelconque de la plaque soit défini par les trois coordonnées  $\rho, \rho_1, z$ ; soit

$$(42) \quad d\bar{s}^2 = \frac{d\rho^2}{h^2} + \frac{d\rho_1^2}{h_1^2} + dz^2$$

le carré de l'élément linéaire dans l'espace exprimé au moyen de ces coordonnées. Coupons ces cylindres par le plan moyen de la plaque qui est le plan des  $xy$  et regardons  $\rho$  et  $\rho_1$  comme les paramètres des deux systèmes de courbes orthogonales contenus dans ce plan.

Par un point quelconque A du plan moyen, menons les normales AN, AN<sub>1</sub> à ces courbes et désignons maintenant par  $u, v$  et  $w$  les projections du déplacement du point A sur les trois lignes AN, AN<sub>1</sub>, AZ, cette dernière étant parallèle à l'axe des  $z$ ; prenons pour un instant ces trois lignes pour axes *fixes* de coordonnées. Alors les formules qui précèdent seront applicables.

Mais, F étant une fonction quelconque de  $x$  et  $y$ , si on la considère comme exprimée en  $\rho$  et  $\rho_1$ , on a, comme on sait, les formules de transformation

$$(k) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = h \frac{\partial F}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = h_1 \frac{\partial F}{\partial \rho_1}.$$

Donc les formules (X) deviennent, en considérant  $\Theta_0, U_0, V_0, W_0, \zeta$  comme fonctions des coordonnées curvilignes  $\rho$  et  $\rho_1$ ,

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G} = \Theta_0 - \frac{\Delta_2 W_0}{k+1} \zeta, \\ u = U_0 - h \frac{\partial W_0}{\partial \rho} \zeta + kh \frac{\partial \Theta_0}{\partial \rho} \frac{z^2}{2} + h_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho_1} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ v = V_0 - h_1 \frac{\partial W_0}{\partial \rho_1} \zeta + kh \frac{\partial \Theta_0}{\partial \rho_1} \frac{z^2}{2} + h \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon}, \\ w = W_0 - k\Theta_0 \zeta + \frac{k}{k+1} \frac{\Delta_2 W_0}{2} z^2. \end{array} \right.$$

Il faut seulement transformer en coordonnées curvilignes les

équations à différences partielles auxquelles satisfont les cinq fonctions des variables  $\rho$  et  $\rho_1$  qui entrent dans les expressions ci-dessus, ainsi que les conditions à la surface et les expressions des forces élastiques.

Les équations (40) sont exactement de même forme que les équations générales de l'élasticité, mais avec cette simplification qu'elles sont à deux variables seulement. On les transformera donc facilement suivant les procédés de Lamé ou celui que j'ai donné au *Bulletin* de M. Darboux, ou tout autre. En introduisant, à titre d'inconnue auxiliaire, le double de la rotation moyenne

$$(k') \quad \frac{\partial U_0}{\partial y} - \frac{\partial V_0}{\partial x} = \Omega,$$

on a identiquement, en vertu de la dernière (40),

$$\begin{aligned} \Delta_2 U_0 &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} + (k+1) \frac{\partial \Theta_0}{\partial x}, \\ \Delta_2 V_0 &= -\frac{\partial \Omega}{\partial x} + (k+1) \frac{\partial \Theta_0}{\partial y}; \end{aligned}$$

par suite, les équations (40) donnent

$$\begin{aligned} (3k+2) \frac{\partial \Theta_0}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{A_0}{2K\varepsilon} &= \frac{\delta}{K} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2}, \\ 3k+2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{B_0}{2K\varepsilon} &= \frac{\delta}{K} \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial V_0}{\partial y} &= (k+1) \Theta_0, \end{aligned}$$

$A_0, B_0$  étant les projections sur les axes  $AN, AN_1$  de la résultante de translation des forces extérieures appliquées le long de la petite ligne verticale passant par le point A.

Les deux premières se transforiment immédiatement par la formule (k); la dernière, ainsi que l'équation (k'), se transforiment sans diffi-

culté, et il vient

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} (3k+2)h \frac{\partial \theta_0}{\partial \rho} - h_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \rho_1} + \frac{A_1}{2K\varepsilon} = \frac{\partial}{K} \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2}, \\ (3k+2)h_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial \rho_1} - h \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} + \frac{B_1}{2K\varepsilon} = \frac{\partial}{K} \frac{\partial^2 V_0}{\partial t^2}, \\ \Omega = hh_1 \left( \frac{\partial \frac{u}{h}}{\partial \rho_1} - \frac{\partial \frac{v}{h_1}}{\partial \rho} \right), \\ (k+1)\theta_0 = hh_1 \left( \frac{\partial \frac{u}{h_1}}{\partial \rho} + \frac{\partial \frac{v}{h}}{\partial \rho_1} \right), \end{array} \right.$$

définissant les quatre fonctions  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\Omega$ .

Quant aux deux fonctions  $W_0$  et  $\zeta$ , elles satisfont toujours aux équations (41) et (39), soit

$$(45) \quad \Delta_2 W_0 - \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)} \frac{1}{\varepsilon^3} C_0 + \frac{3\partial(l+1)}{2K(2k+1)} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} = 0,$$

$$(46) \quad \Delta_2 \zeta = \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2} \zeta + \frac{\pi^2}{8K} \frac{1}{\varepsilon^2} F = 0,$$

en posant, comme précédemment,

$$(46bis) \quad A_1 = h \frac{\partial F}{\partial \rho}, \quad B_1 = h_1 \frac{\partial F}{\partial \rho_1},$$

$C_0$  désignant la composante parallèle à l'axe des  $z$  de la résultante de translation des forces extérieures agissant aux divers points de la petite ligne parallèle à cet axe, passant par le point A et  $A_1$ ,  $B_1$  les sommes des moments de ces mêmes forces par rapport aux deux lignes  $AN$ ,  $AN_1$ .

Pour se servir de ces équations, il suffit de se rappeler qu'en coordonnées curvilignes  $\rho$  et  $\rho_1$ , on a

$$(47) \quad \Delta_2 = hh_1 \left( \frac{\partial \frac{h}{h_1} \frac{\partial}{\partial \rho}}{\partial \rho} + \frac{\partial \frac{h_1}{h} \frac{\partial}{\partial \rho_1}}{\partial \rho_1} \right),$$

et que, d'ailleurs,

$$\Delta_2^2 = \Delta_2 \Delta_2.$$



Maintenant, connaissant les valeurs (43) des composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  du déplacement, les composantes des pressions  $N_i$  et  $T_i$  parallèles aux axes  $AN_1$ ,  $AN_2$ ,  $AZ$ , ces pressions étant considérées comme des fonctions des coordonnées  $\rho$  et  $\rho_1$ ,  $z$ , sont, soit d'après les formules générales de Lamé (*Coordonnées curvilignes*, § CLII), soit en les cherchant directement, ce qui n'est pas difficile,

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 2K \left[ k\mathcal{G}_0 + h \frac{\partial U_0}{\partial \rho} - \frac{h_1}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho_1} V_0 \right. \\
 &\quad + \left( \frac{-k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{h_1^2}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho_1} \frac{\partial W_0}{\partial \rho} - h \frac{\partial h}{\partial \rho} \frac{\partial W_0}{\partial \rho} - h^2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2} \right) z \\
 &\quad \left. + \left( h_1 \frac{\partial h}{\partial \rho_1} \frac{\partial z}{\partial \rho} + h \frac{\partial h_1}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho_1} + hh_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\
 N_2 &= 2K \left[ k\mathcal{G}_0 + h_1 \frac{\partial V_0}{\partial \rho_1} - \frac{h}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \rho} U_0 \right. \\
 &\quad + \left( \frac{-k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{h^2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \rho} \frac{\partial W_0}{\partial \rho} - h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \rho_1} \frac{\partial W_0}{\partial \rho_1} + h^2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2} \right) z \\
 &\quad \left. - \left( h_1 \frac{\partial h}{\partial \rho_1} \frac{\partial z}{\partial \rho} + h \frac{\partial h_1}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho_1} + hh_1 \frac{\partial^2 z}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\
 T_3 &= K \left[ h_1 \frac{\partial U_0}{\partial \rho_1} + h \frac{\partial V_0}{\partial \rho} + \frac{h_1}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho_1} U_0 + \frac{h}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \rho} V_0 \right. \\
 &\quad - 2 \left( h_1 \frac{\partial h}{\partial \rho_1} \frac{\partial W_0}{\partial \rho} + h \frac{\partial h_1}{\partial \rho} \frac{\partial W_0}{\partial \rho_1} + hh_1 \frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) z \\
 &\quad \left. + \left( \frac{h_1}{h} \frac{\partial hh_1}{\partial \rho_1} \frac{\partial z}{\partial \rho} - \frac{h}{h_1} \frac{\partial hh_1}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \rho_1} \right) \sin \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\
 T_1 &= K - \left[ \frac{2k+1}{k-1} h_1 \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial \rho_1} (\varepsilon^2 - z^2) - \frac{\pi}{2\varepsilon} h \frac{\partial z}{\partial \rho} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\
 T_2 &= K \left[ -\frac{2k+1}{k+1} h \frac{\partial \Delta_2 W_0}{\partial \rho} (\varepsilon^2 - z^2) + \frac{\pi}{2\varepsilon} h_1 \frac{\partial z}{\partial \rho_1} \cos \frac{\pi z}{2\varepsilon} \right], \\
 N_3 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{48}$$

### Conditions au pourtour.

1° *Plaque libre.* — Supposons que le pourtour soit une courbe  $\rho = \rho_0$  et soient  $v_{b_0}$ ,  $Z_0$  les projections sur les axes  $AN$ ,  $AN_1$ ,  $AZ$  de la résultante de translation des pressions extérieures agissant sur la

génératrice du cylindre qui termine la plaque passant par le point A, et  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{C}'$  la somme des moments de ces pressions par rapport aux axes AN et AN<sub>1</sub>; on devra avoir les cinq conditions à la surface.

Pour  $\rho = \rho_0$ ,

$$\begin{aligned} \int N_1 dz &= \mathfrak{A}_0, & \int T_2 dz &= \mathfrak{W}_0, & \int T_2 dz &= Z_0, \\ \int N_1 z dz &= \mathfrak{C}, & \int T_3 dz &= + \mathfrak{C}', \end{aligned}$$

ou bien

$$(49) \quad \begin{cases} k\theta_0 + h \frac{\partial U_0}{\partial \rho} - \frac{h_1}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho_1} V_0 = \frac{\mathfrak{A}_0}{4K\mathfrak{E}}, \\ h_1 \frac{\partial U_0}{\partial \rho} + h \frac{\partial V_0}{\partial \rho} + \frac{h_1}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho_1} U_0 + \frac{h_1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \rho} V_0 = \mathfrak{W}_0, \end{cases}$$

$$(50) \quad \begin{cases} -\frac{2k+1}{k+1} \frac{2\mathfrak{E}^2}{3} h \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial \rho} + h_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho_1} = \frac{Z_0}{2K}, \\ \left( -\frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{h_1^2}{h} \frac{\partial h}{\partial \rho_1} \frac{\partial W_0}{\partial \rho_1} - h \frac{\partial h}{\partial \rho} \frac{\partial W_0}{\partial \rho} - h^2 \frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho^2} \right) \frac{2\mathfrak{E}^2}{3} \\ \quad + \frac{8\mathfrak{E}^2}{\pi^2} \left( h_1 \frac{\partial h}{\partial \rho_1} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + h \frac{\partial h_1}{\partial \rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho_1} + h h_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) = \frac{\mathfrak{C}}{2K}, \\ - \left( h_1 \frac{\partial h}{\partial \rho_1} \frac{\partial W_0}{\partial \rho} + h \frac{\partial h_1}{\partial \rho} \frac{\partial W_0}{\partial \rho_1} + h h_1 \frac{\partial^2 W_0}{\partial \rho \partial \rho_1} \right) \frac{4\mathfrak{E}^2}{3} \\ \quad + \frac{2\mathfrak{E}^2}{\pi^2} \left( \frac{h_1}{h} \frac{\partial h h_1}{\partial \rho_1} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - \frac{h}{h_1} \frac{\partial h h_1}{\partial \rho} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) = \frac{\mathfrak{C}'}{K}. \end{cases}$$

En résumé, les fonctions  $U_0$ ,  $V_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\Omega$  doivent satisfaire aux quatre équations à différences partielles (44) et aux conditions à la surface (49); les deux fonctions  $W_0$  et  $\zeta$ , aux équations (45) et (46) et aux trois conditions à la surface (50) (et en outre toutes ces fonctions satisfaisant à des conditions initiales dans le cas du mouvement).

Si la plaque n'est pas libre, si elle est appuyée sur tout son pourtour, la première des conditions (50) est remplacée par celle-ci :

$$(51) \quad W_0 = 0,$$

et la première équation (50) détermine alors l'effort tranchant inconnu  $Z_0$  qui s'exerce sur le pourtour de la plaque.

Si la plaque est encadrée, les deux premières conditions (50) sont remplacées par celles-ci :

$$(52) \quad W_0 = 0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial \rho} = 0,$$

et les deux premières équations (50) fourniront alors les valeurs du moment fléchissant et de l'effort tranchant sur le pourtour.

On voit que la dernière condition (50) subsiste dans tous les cas : c'est celle relative au moment de la torsion. Poisson, dans ses applications, ne s'en occupait pas; ainsi, dans le cas de la plaque encadrée, il se bornait à considérer pour toutes conditions à la surface celles (52); c'est là ce qui fait qu'il ne s'est pas aperçu de l'impossibilité du problème d'Analyse auquel il était arrivé.

## VI.

### *Application à l'équilibre et au mouvement des plaques circulaires.*

Nous allons appliquer la théorie générale qui précède à l'équilibre et au mouvement d'une plaque circulaire.

Occupons-nous d'abord de l'équilibre.

1° *Équilibre d'une plaque libre.* — Soit en premier lieu une plaque entièrement libre sur le pourtour de laquelle sont appliqués des couples situés dans les plans méridiens du cylindre qui termine la plaque; ces couples varient d'ailleurs d'une manière quelconque, continue ou discontinue, d'un plan méridien à l'autre. On fait abstraction des forces, telles que la pesanteur, agissant sur la masse entière de la plaque et l'on demande de trouver la forme qu'elle prendra et les forces élastiques qui se développeront en chaque point.

Prenons, pour définir les divers points de la plaque, un système de coordonnées semi-polaires ayant pour axe l'axe de la plaque. Soient  $r$ ,  $\alpha$ ,  $z$  les coordonnées d'un point de la plaque, en sorte que le carré de l'élément linéaire de l'espace sera

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\alpha^2 + dz^2;$$

par suite, si l'on fait  $\rho = r$ ,  $\rho_1 = \alpha$ , il vient

$$h = 1, \quad h_1 = \frac{1}{r}.$$

Les cinq fonctions  $A_0, B_0, C_0, \Delta_1, B_1$  qui dépendent des forces agissant sur la masse entière de la plaque, sont ici nulles; il en est de même des quatre fonctions  $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, Z_0, \mathfrak{T}$ . Il ne reste que celle  $\mathfrak{E}$ , qui est une fonction donnée continue ou discontinue de  $\alpha$ .

Il résulte de là qu'on satisfait à toutes les conditions (44) et (49), en posant

$$\Theta_0 = U_0 = V_0 = \Omega = 0,$$

ce qui signifie que la tension du plan moyen de la plaque est nulle, chose facile à prévoir.

Il reste donc seulement à trouver les deux fonctions  $W_0$  et  $\zeta$ , qui forment, en effet, les véritables inconnues de tout problème sur les plaques, les quatre autres fonctions donnant lieu à une recherche séparée qui appartient à l'étude de la membrane élastique.

On a ici

$$(53) \quad \Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Si donc on pose

$$(54) \quad \Delta_2 W_0 = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial W_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_0}{\partial z^2} = S,$$

il viendra

$$(55) \quad \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0.$$

D'ailleurs la fonction  $\zeta$  doit satisfaire à

$$(56) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{\pi^2}{4 \varepsilon^2} \zeta = 0.$$

Enfin les trois conditions à la surface sont, pour  $r = r_0$ , la plaque

étant libre et de rayon  $r = r_0$ ,

$$(57) \quad \begin{cases} -\frac{2k+1}{k+1} \frac{2z^3}{3} \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial r} - \frac{1}{r_0} \frac{J \zeta}{\partial z} = 0, \\ \frac{k}{k-1} S + \frac{\partial^3 W_0}{\partial r^3} = -\frac{3\bar{\epsilon}}{4K\epsilon^3}, \\ \frac{1}{r_0} \frac{\partial W_0}{\partial z} - \frac{\partial^2 W_0}{\partial r \partial z} = 0, \end{cases}$$

$\bar{\epsilon}$  étant une fonction donnée de  $z$ , continue ou discontinue.

Dans les deux dernières on a négligé les termes en  $\zeta$  qui, en vertu de la première, sont négligeables, comme il résulte de la discussion de la fin du § IV.

On satisfait à l'équation (55) en posant

$$(58) \quad S = A r^n (A \sin n\alpha + B \cos n\alpha),$$

$n$  étant un nombre entier, A et B des constantes arbitraires; puis à l'équation (54) en prenant

$$(59) \quad W_0 = \left[ \frac{\Lambda}{4(n+1)} r^{n+2} + A' r^n \right] \sin n\alpha + \left[ \frac{B}{4(n+1)} r^{n+2} + B' r^n \right] \cos n\alpha,$$

A' et B' étant deux nouvelles constantes arbitraires.

Enfin on satisfait à l'équation en  $\zeta$  par la solution particulière

$$(60) \quad \zeta = R(C \sin n\alpha + D \cos n\alpha),$$

R étant une fonction de la seule variable  $r$  satisfaisant à l'équation différentielle

$$(61) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \left( \frac{n^2}{r^2} + \frac{\pi^2}{4z^2} \right) R = 0.$$

Et si l'on pose

$$x = \frac{\pi}{2z} r,$$

$$(61 \text{ bis}) \quad \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial R}{\partial x} - \left( \frac{n^2}{x^2} + 1 \right) R = 0,$$

dont une solution particulière est la fonction de Bessel d'ordre  $n$ , qu'on peut représenter, soit sous la forme d'une intégrale définie, soit sous la forme de la série

$$(62) \quad R = \frac{r^n}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left[ 1 + \frac{r^2}{2(2n+2)} + \frac{r^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right],$$

ou

$$(62 \text{ bis}) \quad R = \left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^n \frac{r^n}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left[ 1 + \frac{\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^2 r^2}{2(2n+2)} + \frac{\left(\frac{\pi}{2\varepsilon}\right)^4 r^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right].$$

Maintenant, la troisième des conditions à la surface donne, entre les constantes qui entrent dans l'expression de  $W_0$ , les relations

$$\frac{A r_0^2}{4} + (n-1)A' = 0, \quad \frac{B r_0^2}{4} + (n-1)B' = 0$$

ou

$$A' = -\frac{A r_0^2}{4(n+1)}, \quad B' = -\frac{B r_0^2}{4(n+1)}.$$

La première des conditions à la surface donne de même, en désignant par  $R_0$  la valeur de la fonction  $R$  pour  $r = r_0$ , les deux relations

$$C = \frac{2k+1}{k+1} \frac{2\varepsilon^3}{3} \frac{r_0^n}{R_0} B, \quad D = -\frac{2k+1}{k+1} \frac{2\varepsilon^3}{3} \frac{r_0^n}{R_0} A;$$

par suite, les solutions particulières obtenues prennent la forme

$$(63) \quad \begin{cases} S = r^n (A \sin n\alpha + B \cos n\alpha), \\ W_0 = \frac{r^n}{4} \left( \frac{r^2}{n+1} - \frac{r_0^2}{n-1} \right) (A \sin n\alpha + B \cos n\alpha), \\ \zeta = \frac{2k+1}{k+1} \frac{2\varepsilon^3}{3} \frac{r_0^n}{R_0} \frac{R}{r} (B \sin n\alpha - A \cos n\alpha). \end{cases}$$

Si l'on prend la somme de toutes les expressions répondant à tous les nombres entiers  $n$ , on aura encore une solution satisfaisant à toutes les conditions du problème, sauf la seconde (57). On devra

donc déterminer les constantes A et B, de façon que cette condition soit remplie, ce qui donne, après quelques réductions,

$$\sum_n r_0^n (A \sin n\alpha + B \cos n\alpha) = \frac{3(k+1)\bar{c}}{2(3k+1)K\varepsilon^3}.$$

Cette équation devant avoir lieu pour les valeurs de  $\alpha$  comprises entre zéro et  $2\pi$ , on en tire

$$(64) \quad \begin{cases} A = \frac{3(k+1)}{2(3k+1)K\varepsilon^3} \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} \bar{c} \sin n\alpha d\alpha, \\ B = \frac{3(k+1)}{2(3k+1)K\varepsilon^3} \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^{2\pi} \bar{c} \cos n\alpha d\alpha, \end{cases}$$

en ayant soin, comme on sait, de multiplier par  $\frac{1}{2}$  la valeur donnée par cette formule, pour B, dans le terme relatif à  $n = 0$ .

Et l'on aura finalement

$$(65) \quad \begin{cases} S = \sum_n r^n (A \sin n\alpha + B \cos n\alpha), \\ W_0 = \sum_n \frac{r^n}{4} \left( \frac{r^2}{n+1} - \frac{r_0^2}{n-1} \right) (A \sin n\alpha + B \cos n\alpha), \\ \zeta = \frac{2k+1}{k+1} \frac{2\varepsilon^3}{3} \sum_n r_0^n \frac{R}{R_0} (B \sin n\alpha - A \cos n\alpha). \end{cases}$$

Si les couples sont symétriquement distribués par rapport au diamètre pris pour axe polaire, la fonction  $\bar{c}$  aura la même valeur pour les valeurs  $\alpha$  et  $2\pi - \alpha$ ; par suite, on aura  $A = 0$ .

$$(65 \text{ bis}) \quad \begin{cases} B = \frac{3(k+1)}{(3k+1)K\varepsilon^3} \frac{1}{\pi r_0^n} \int_0^\pi \bar{c} \cos n\alpha d\alpha, \\ S = \sum_n B r^n \cos n\alpha, \\ W_0 = \sum_n B \frac{r^n}{4} \left( \frac{r^2}{n+1} - \frac{r_0^2}{n-1} \right) \cos n\alpha, \\ \zeta = \frac{2k+1}{k+1} \frac{2\varepsilon^3}{3} \sum_n B r_0^n \frac{R}{R_0} \sin n\alpha. \end{cases}$$

Les formules (43) et (48) donnent d'ailleurs les déplacements et les forces élastiques en tout point de la plaque, une fois connues les fonctions  $W_0$  et  $\zeta$ .

Les formules qui précèdent paraissent au premier abord conduire à une absurdité. En effet, le terme des sommes  $\Sigma$ , répondant à  $n = 1$ , paraît devoir rendre  $W_0$  infini. Pour que cela n'ait pas lieu, il faut que les valeurs des coefficients A et B répondant à  $n = 1$  soient nulles. Or c'est ce qui arrive nécessairement; car, pour  $n = 1$ , les formules (64) montrent que les coefficients A et B contiennent les facteurs

$$\int_0^{2\pi} \bar{c} \sin \alpha dz, \quad \int_0^{2\pi} \bar{c} \cos \alpha dz.$$

Or il faut que ces deux intégrales soient nulles pour que tous les couples agissant sur le pourtour de la plaque se fassent équilibre; les équations

$$\int_0^{2\pi} \bar{c} \sin \alpha dz = 0, \quad \int_0^{2\pi} \bar{c} \cos \alpha dz = 0$$

sont précisément les conditions nécessaires et suffisantes pour cet équilibre.

Supposons ces conditions remplies, en sorte que pour  $n = 1$  les coefficients A et B sont nuls; le terme en  $r^{n+2} = r^3$  de l'expression de  $W_0$  sera donc lui-même nul pour  $n = 1$ ; mais le terme en  $r_0^2 r^n = r_0 r$  ne le sera pas, puisqu'il contient  $n = 1$  en dénominateur, en sorte que les rapports  $\frac{A}{n-1}$  et  $\frac{B}{n-1}$  demeurent indéterminés et ce terme de  $W_0$  sera

$$W'_0 = r(A_1 \sin \alpha + B_1 \cos \alpha),$$

$A_1$  et  $B_1$  étant deux constantes entièrement arbitraires.

Il est facile, en effet, de vérifier directement qu'en ajoutant un tel terme à l'expression de  $W_0$ , quelles que soient les constantes  $A_1$  et  $B_1$ , on ne cessera de satisfaire ni à l'équation à différences partielles qui régit cette fonction, ni aux trois conditions à la surface.

Cela s'explique facilement en observant que, si l'on pose  $r \cos \alpha = x$ ,



$r \sin \alpha = y$ , l'équation ci-dessus est

$$W'_0 = A'x + B'y : .$$

$W'_0$  est donc l'ordonnée d'un plan; donc, ajouter à la fonction  $W_0$  l'expression  $W'_0$ , cela équivaut à déplacer le plan moyen de la plaque et, par suite, la plaque tout entière dans l'espace, comme un système invariable, ce qui ne développe pas de forces élastiques. On peut donc supposer  $A_1 = 0$ ,  $B_1 = 0$ , c'est-à-dire qu'on peut supposer dans la série qui exprime  $W_0$  le terme relatif à  $n = 1$  nul. Cela revient simplement à définir la position de la plaque dans l'espace.

Supposons qu'il agisse sur la plaque deux couples seulement, égaux et opposés, placés aux deux extrémités d'un diamètre, et prenons l'axe polaire à partir duquel est compté l'angle  $\alpha$  perpendiculaire à ce diamètre.

Nous rentrons dans le cas de symétrie indiqué par les formules (65 bis). La fonction  $\bar{\epsilon}$  est, dans ce cas, telle, qu'elle s'annule pour toutes les valeurs de  $\alpha$  autres que celles de  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ ; d'ailleurs si

l'on pose  $\int_0^{\pi/2} \bar{\epsilon} dz = \Gamma$ ,  $\Gamma$  étant une constante donnée, on aura, par suite,

$$B = \frac{3(k+1)}{(3k+1)K\epsilon^3} \frac{\Gamma}{\pi r_0^2} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

Donc  $B$  est nul pour  $n$  impair, et en posant  $n = 2i$ , on aura

$$B = (-1)^i \frac{3(k+1)}{(3k+1)K\epsilon^3} \frac{\Gamma}{\pi r_0^2}.$$

par suite

$$S = \frac{3(k+1)}{\pi(3k+1)K\epsilon^3} \sum_i (-1)^i \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2i} \cos 2i\alpha,$$

$$W_0 = \frac{3(k+1)\Gamma}{\pi(3k+1)K\epsilon^3} \sum_i (-1)^i \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2i} \left(\frac{r^2}{2i+1} - \frac{r_0^2}{2i-1}\right) \cos 2i\alpha,$$

$$\zeta = \frac{(2k+1)\Gamma}{\pi(3k+1)K} \sum_i (-1)^i r_0^{2i} \frac{R}{K_0} \sin 2i\alpha.$$

En s'arrêtant aux deux premiers termes de ces séries, on reconnaît facilement les lois approchées du déplacement de la plaque, dans ce cas particulier; d'où, par la superposition des effets des forces élastiques, on passerait facilement à tous les cas où les couples sont symétriquement répartis de part et d'autre de l'axe de la plaque.

Si l'on suppose que les couples sont uniformément répartis sur le pourtour de la plaque, c'est-à-dire que  $\mathfrak{C}$  soit indépendant de  $\alpha$ , il est facile de voir qu'il en sera de même de  $W_0$  et de  $\zeta$ ; le problème se résout en termes finis, c'est-à-dire qu'on en aura la solution rigoureuse en prenant dans les séries le seul terme répondant à  $n = 0$ , ce qui donne, en particulier pour  $\zeta$ ,

$$\zeta = \frac{2k+1}{k+1} \frac{2\varepsilon^2}{3} r_0^2 \frac{R}{R_0} A.$$

Mais, en vertu de la formule (64), on a, pour  $n = 0$ ,  $A = 0$ . Ainsi donc, dans le cas de symétrie tout autour du centre, la fonction additionnelle disparaît et l'on retrouve les formules données par Poisson, lesquelles se trouvent dans ce cas particulier, le seul que Poisson ait traité, satisfaire à toutes les conditions du problème, bien que ses formules générales n'y satisfassent pas.

Cela tient à ce que la troisième des conditions à la surface (57) se trouve remplie d'elle-même lorsque  $W_0$  est indépendant de  $\alpha$  et que cette fonction n'a ainsi plus à satisfaire qu'à deux conditions, ce qui est possible. En d'autres termes, nous avons dit que, pour que le problème d'Analyse auquel parvient Poisson soit possible, il faut qu'entre les forces extérieures agissant sur la plaque il existe une certaine condition. Le cas de la plaque circulaire uniformément chargée, soit sur sa masse, soit sur son pourtour, est un de ceux où cette condition se trouve satisfaite; mais, dès que la charge devient dissymétrique, il n'en est plus ainsi, et notre fonction  $\zeta$ , en général, s'introduira.

Nous trouverons plus loin un cas beaucoup plus étendu où cette fonction n'apparaît pas, où, par suite, la théorie de Poisson ne se trouve pas en défaut: c'est celui des plaques encastrées sur leur pourtour, quelles que soient les charges.

*Équilibre de la plaque circulaire appuyée sur son pourtour.*

Supposons maintenant une plaque circulaire appuyée sur son contour moyen; supposons d'ailleurs qu'aucune force ne s'exerce sur sa surface latérale et que sur sa masse entière s'exercent, normalement au plan moyen, des forces données, continues ou discontinues.

Les équations indéfinies du problème sont, dans ce cas,

$$(66) \quad \begin{cases} \Delta_2^2 W_0 - \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)} \frac{C_0}{\varepsilon^2} = 0, \\ \Delta_2 \zeta - \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2} \zeta = 0, \end{cases}$$

$C_0$  étant une fonction arbitrairement donnée, continue ou discontinue des deux variables  $r$  et  $\alpha$ ; pour  $r = r_0$ , on a la condition  $W_0 = 0$ , remplaçant la première (50); les deux dernières (50) deviennent, en y faisant  $\rho = r$ ,  $\rho_1 = \alpha$ ,  $h = 1$ ,  $h_1 = \frac{1}{r}$ ,

$$(67) \quad \begin{cases} - \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2} \right) + \frac{12}{\pi^2 \varepsilon} \left( - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial \alpha} \right) = 0, \\ \left( \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial W_0}{\partial \alpha} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 W_0}{\partial r \partial \alpha} \right) + \frac{3}{2\pi^2 \varepsilon} \left( \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{r^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) = 0. \end{cases}$$

En posant, comme précédemment,

$$(68) \quad \Delta_2 W_0 = S,$$

on aura

$$(68 \text{ bis}) \quad \Delta_2 S + \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)} \frac{C_0}{\varepsilon^2} = 0.$$

Posons, de plus,

$$(69) \quad \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)} \frac{C_0}{\varepsilon^2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos n\alpha + Q_n \sin n\alpha,$$

$P_n$  et  $Q_n$  étant des fonctions de  $r$  définies par les équations

$$(70) \quad P_n = \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)} \int_0^{2\pi} C_0 \cos n\alpha \, d\alpha, \quad Q_n = \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)} \int_0^{2\pi} C_0 \sin n\alpha \, d\alpha.$$

On satisfera à l'équation (68) en posant

$$S = R'_{n=0} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (R' \cos n\alpha + R'' \sin n\alpha),$$

pourvu que les fonctions  $R'$  et  $R''$  satisfassent aux équations différentielles

$$(71) \quad \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial R'}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} R' - P_n = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial R''}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} R'' - Q_n = 0. \end{cases}$$

Pour toutes les valeurs de  $n$  différentes de zéro, on conclut de là, en posant, pour abrégé,

$$(72) \quad \begin{cases} P' = \frac{1}{2n} \left( 2C_0 r^n \int_0^r \frac{P_n dr}{r^{n-1}} - r^{-n} \int_0^r P_n r^{n+1} dr \right), \\ Q' = \frac{1}{2n} \left( 2C_0 r^n \int_0^r \frac{Q_n dr}{r^{n-1}} - r^{-n} \int_0^r Q_n r^{n+1} dr \right), \end{cases}$$

$$(73) \quad R' = P' + A r^n, \quad R'' = Q' + B r^n.$$

Pour  $n = 0$ , on trouve facilement,  $A_0$  étant une constante arbitraire,

$$(74) \quad R' = A_0 - \int_0^r P_{n=0} \log \frac{r}{r_0} dr + \log \frac{r}{r_0} \int_0^r P_{n=0} r dr = R'_{n=0};$$

par suite

$$(75) \quad S = R'_{n=0} + \sum_{n=1}^{n=\infty} [(P' + A r^n) \cos n\alpha + (Q' + B r^n) \sin n\alpha].$$

En remplaçant S par sa valeur dans l'équation (68 bis) et posant

$$(76) \quad \begin{cases} P'' = \frac{1}{2n} C_0 r^n \int_0^r \frac{P' dr}{r^{n-1}} - r^{-n} \int_0^r P r^{n+1} dr, \\ Q'' = \frac{1}{2n} C_0 r^n \int_0^r \frac{Q' dr}{r^{n-1}} - r^{-n} \int_0^r Q r^{n+1} dr. \end{cases}$$

on peut vérifier qu'on satisfera à cette équation par l'expression

$$(77) \quad \begin{cases} W_0 = w_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \left[ P'' \left( \frac{A r^{n+2}}{4(n+1)} + A' r^n \right) \cos n\alpha \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ Q'' \frac{B r^{n+2}}{4(n+1)} + B' r^n \right] \sin n\alpha \right\}, \end{cases}$$

où A' et B' désignent deux nouvelles séries de constantes arbitraires, et

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} w_0 = A_0 \frac{r_0^2}{4} + f - \frac{1}{4} \left[ r^2 \left( 1 + \log \frac{r}{r_0} \right) \int_0^r P_{n=0} r dr - \left( 1 + \log \frac{r}{r_0} \right) \right. \\ \times \int_0^r P_{n=0} r^3 dr + r^2 \int_0^r P_{n=0} r \log \frac{r}{r_0} dr \\ \left. + \int_0^r P_{n=0} r^3 \log \frac{r}{r_0} dr \right] \end{aligned} \right.$$

étant une nouvelle constante arbitraire qui représente la flèche que prend la plaque, c'est-à-dire la valeur de la fonction  $W_0$  répondant à  $r = 0$ .

On satisfera à la condition  $W_0 = 0$  sur le pourtour en exprimant que, pour  $r = r_0$ , chaque terme du second membre de (77) s'annule séparément, ce qui donne d'abord

$$(79) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 \frac{r_0^2}{4} + f - \frac{1}{4} \left( r_0^2 \int_0^{r_0} P_{n=0} r dr - \int_0^{r_0} P_{n=0} r^3 dr \right. \\ \left. + r_0^2 \int_0^{r_0} P_{n=0} r \log \frac{r}{r_0} dr + \int_0^{r_0} P_{n=0} r^3 \log \frac{r}{r_0} dr \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Puis  $P'_0$  et  $Q'_0$  désignant les valeurs des fonctions  $P''$  et  $Q''$  répondant à  $r = r_0$ ,

$$(80) \quad \begin{cases} P'_0 + \frac{A r_0^{n+2}}{4(n+1)} + A' r_0^n = 0, \\ Q'_0 + \frac{B r_0^{n+2}}{4(n+1)} + B' r_0^n = 0. \end{cases}$$

De là on déduit

$$(81) \quad \begin{cases} f = \frac{1}{4} \left( A_0 r_0^2 + r_0^2 \int_0^{r_0} P_{n=0} r dr - \int_0^{r_0} P_{n=0} r^3 dr \right. \\ \left. + r_0^2 \int_0^{r_0} P_{n=0} r \log \frac{r}{r_0} dr + \int_0^{r_0} P_{n=0} r^3 \log \frac{r}{r_0} dr \right), \end{cases}$$

$$(82) \quad \begin{cases} w_0 = \frac{1}{4} \left[ A_0 (r^2 - r_0^2) - r^2 \left( 1 - \log \frac{r}{r_0} \right) \int_0^r P r dr + \left( 1 + \log \frac{r}{r_0} \right) \right. \\ \left. \times \int_0^r P r^3 dr - r^2 \int_0^r P r \log \frac{r}{r_0} dr \right. \\ \left. - \int_0^r P r^3 \log \frac{r}{r_0} dr + r_0^2 \int_0^r P r dr - \int_0^r P r^3 dr \right], \end{cases}$$

$$(83) \quad A' = -\frac{A r_0^2}{4(n+1)} - P'_0 r_0^{-n}, \quad B' = -\frac{B r_0^{n+2}}{4(n+1)} - Q'_0,$$

$$(84) \quad \begin{cases} W_0 = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ P'' - P'_0 r_0^{-n} r^{2n} + \frac{A r^n}{4(n+1)} (r^2 - r_0^2) \right] \cos n\alpha \right. \\ \left. + \left[ Q'' - Q'_0 r_0^{-n} r^{2n} + \frac{B r^n}{4(n+1)} (r^2 - r_0^2) \right] \right\} \sin n\alpha. \end{cases}$$

Quant à la fonction  $\zeta$ , on peut prendre, comme dans le précédent problème,

$$\zeta = \sum_n R (D \cos n\alpha + C \sin n\alpha),$$

R désignant la série (62 bis).

Il reste à satisfaire aux deux conditions (67).

On y satisfera évidemment si chacun des termes des deux séries  $W_0$  et  $\zeta$  y satisfait, ce qui nous donnera d'abord, pour  $n = 0$ , les deux

équations

$$\left( \frac{k}{k+1} R'_{n=0} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2} \right)_0 = 0,$$

$$\left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right)_0 = 0,$$

ou bien

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{2} + \frac{k}{k+1} \right) - A_0 + \int_0^{r_0} P_{n=0} r \log \frac{r}{r_0} dr \\ + \frac{1}{4} \int_0^{r_0} P_{n=0} r dr + \frac{1}{4r^2} \int_0^{r_0} P_{n=0} r^3 dr = 0, \\ D_0 = 0, \end{array} \right.$$

où  $D_0$  désigne la valeur du coefficient  $D$  répondant à  $n = 0$ .

Puis, pour les valeurs de  $n$ , autres que  $n = 0$ ,

$$(86) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_0^n \left[ \frac{-k}{k+1} + \frac{2n+1}{2(n+1)} \right] A + \frac{1^2 n}{\pi^2 \varepsilon} \left[ -\frac{R_0}{r_0^2} + \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right)_0 \right] C \\ - \frac{k P'_n}{k-1} + \left( \frac{\partial^2 P^n}{\partial r^2} \right)_0 + n(n-1) P''_n r_0^{-2} = 0, \\ \frac{n r_0^{n+1}}{2(n+1)} A + \frac{3 r_0}{2\pi^2 \varepsilon} \left[ -\frac{n^2}{r_0^2} R_0 - \left( \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right)_0 \right. \\ \left. - \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right)_0 \right] C + \left( \frac{\partial P^n}{\partial r} \right)_0 - \frac{n P'_n}{r_0} = 0; \end{array} \right.$$

$$(86 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_0^n \left[ \frac{-k}{k+1} + \frac{2n+1}{2(n+1)} \right] B - \frac{1^2 n}{\pi^2 \varepsilon} \left[ -\frac{R_0}{r_0^2} + \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right)_0 \right] D \\ - \frac{k Q'_n}{k+1} + \left( \frac{\partial^2 Q^n}{\partial r^2} \right)_0 + n(n-1) Q''_n r_0^{-2} = 0, \\ \frac{-n r_0^{n+1}}{2(n+1)} B + \frac{3 r_0}{2\pi^2 \varepsilon} \left[ -\frac{n^2}{r_0^2} R_0 - \left( \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right)_0 \right. \\ \left. - \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right)_0 \right] D + \left( \frac{\partial Q^n}{\partial r} \right)_0 - \frac{n Q'_n}{r_0} = 0, \end{array} \right.$$

où l'indice zéro indique les valeurs des fonctions qu'il affecte, répondant à  $r = r_0$ .

Les quatre dernières équations donnent les valeurs des quatre séries

de coefficients A, B, C, D, pour toutes les valeurs de  $n$  autres que  $n = 0$ .

Les deux précédentes donnent les valeurs de  $A_0$  et de  $D_0$  pour  $n = 0$ , en sorte que toutes les constantes sont déterminées. En éliminant  $A_0$  entre les équations (81) et (85), on trouve la flèche

$$(87) \quad \left\{ \begin{aligned} f &= \frac{7k+3}{8(3k+1)} \left( - \int_0^{r_0} P_{n=0} r^2 dr + r_0^2 \int_0^{r_0} P_{n=0} r dr \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left( \int_0^{r_0} P_{n=0} r^3 \log \frac{r}{r_0} dr \right). \end{aligned} \right.$$

Appliquons la formule qui donne la flèche, au cas d'une charge isolée  $\Pi$  s'exerçant sur le diamètre pris pour axe polaire, à une distance  $r = x_0$  du centre de la plaque. Comme nous avons appelé  $C_0$  la charge par mètre superficiel, on a

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} C_0 r dr dz = \Pi \quad \text{ou} \quad \int_0^{r_0} r dr \int_0^{2\pi} C_0 dz = \Pi,$$

et la fonction  $C_0$  n'a ici de valeur sensible que pour  $r = x_0$ ,  $\alpha = 0$ . D'ailleurs les équations (70) donnent

$$P_{n=0} = \frac{3(k+1)}{4K(2k+1)\varepsilon^3} \int_0^{2\pi} C_0 dz;$$

par suite

$$\Pi = \frac{4K(2k+1)\varepsilon^3}{3(k+1)} \int_0^{r_0} P_{n=0} r dr.$$

Or, de (87) on tire, en observant que  $P_{n=0}$  n'a ici de valeur appréciable que pour  $r = x_0$ ,

$$f = \left[ \frac{7k+3}{8(3k+1)} (r_0^2 - x_0^2) + \frac{x_0^2}{4} \log \frac{x_0}{r_0} \right] \int_0^{r_0} P_{n=0} r dr,$$

ou

$$f = \frac{3(k+1)}{16K(2k+1)\varepsilon^3} \Pi \left[ \frac{7k+3}{2(3k+1)} (r_0^2 - x_0^2) + x_0^2 \log \frac{r_0}{x_0} \right].$$



Le fait, qu'on peut ainsi trouver la flèche au centre en termes finis, quelle que soit la distribution des charges, est très-intéressant.

Observons que  $P_n = 0$  ne dépend pas de toutes les charges  $C_0$ , mais seulement de l'expression

$$\int_0^{2\pi} C_0 dz,$$

comme le montrent les formules (70). Si donc on ne change pas cette dernière intégrale, la fonction  $P_{n=0}$  ne changera pas, ni, par suite, la flèche  $f$ . Or, si nous considérons les charges  $C_0$  agissant tout le long d'un cylindre de rayon  $r$ , concentrique à la plaque, l'intégrale ci-dessus exprimera leur résultante; cela signifie donc que, si l'on modifie, d'une manière quelconque, la distribution des charges sur la plaque, pourvu que la résultante de toutes celles qui agissent à une même distance  $r$  de l'axe ne change pas, la flèche elle-même ne changera pas. En d'autres termes, on a ce théorème :

*La flèche au centre d'une plaque circulaire appuyée sur son pourtour ne change pas si l'on vient à modifier arbitrairement les charges que supporte la plaque, pourvu qu'on conserve la résultante de toutes celles qui agissent à égale distance de son centre.*

En terminant, observons encore que, si la charge était symétriquement distribuée autour du centre de la plaque, il est clair que le plan moyen déformé deviendrait une surface de révolution.

Pour déduire ce cas particulier traité par Poisson de nos formules, il suffit de réduire chaque série à son premier terme, celui répondant à  $n = 0$ . Et, comme on a  $D_0 = 0$ , on voit que la fonction  $\zeta$  disparaîtra dans ce cas; en d'autres termes, on retrouve alors les formules de Poisson, comme cela s'est produit aussi dans le cas analogue de la plaque libre et pour les mêmes raisons.

### *Équilibre d'une plaque circulaire encastree.*

Le cas de l'encastrement se traite exactement de la même manière. L'expression (84) de  $W_0$  convient; elle satisfait à la condition que, sur

tout le pourtour,  $W_0 = 0$ . Mais ici il faut en outre que  $\frac{\partial W_0}{\partial r} = 0$ , ce qui donne les conditions nécessaires pour déterminer les constantes A, B qui entrent dans l'expression de  $W_0$ .

Cette nouvelle équation  $\frac{\partial W_0}{\partial r} = 0$  remplace la première (61) du problème précédent; la troisième subsiste; mais, à cause de  $W_0 = 0$  et  $\frac{\partial W_0}{\partial r} = 0$ , on a aussi sur le pourtour

$$\frac{\partial W_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial r \partial z} = 0;$$

par suite, la troisième condition se réduit à

$$\frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0,$$

et l'on y satisfait, ainsi qu'à l'équation à différences partielles qui régit  $\zeta$ , par  $\zeta = 0$ . Ainsi cette fonction additionnelle disparaît ici, et ce problème ne comporte qu'une seule inconnue et est, à ce point de vue, plus simple que les précédents.

Comme dans le problème de la plaque appuyée, on peut ici trouver en termes finis la grandeur de la flèche au centre: elle ne dépend que du premier terme de  $W_0$ , tous les autres disparaissant pour  $r = 0$ .

Pour trouver la constante  $A_0$  qui entre dans ce terme, nous écrivons que, pour  $r = r_0$ ,  $\frac{dW_0}{dr} = 0$ , soit

$$A_0 r_0^2 + \frac{1}{2} \left( r_0 \int_0^{r_0} P_{n=0} r dr - \frac{1}{r_0} \int_0^{r_0} P_{n=0} r^3 dr + 2r_0 \int_0^{r_0} P_{n=0} r \log \frac{r}{r_0} dr \right) = 0.$$

Par suite, l'équation (87) donne la flèche. Supposons une charge unique  $\Pi$  à la distance  $r = x_0$  du centre, en sorte que

$$\int_0^{r_0} P_{n=0} r dr = \frac{-3(k+1)\Pi}{4K(2k+1)\varepsilon^2},$$

et que  $P_n$  n'ait d'ailleurs de valeur sensible que pour  $x = x_0$ .

Alors l'équation ci-dessus devient

$$A_0 r_0^2 = \frac{3(k+1)\Pi}{8K(2k+1)^2} \left( r_0^2 - x_0^2 + 2r_0^2 \log \frac{x_0}{r_0} \right).$$

D'autre part la formule (87) donne, en désignant ici la flèche  $f$  par  $f'$ ,

$$f' = -\frac{1}{4} A_0 r_0^2 + \frac{3(k+1)\Pi}{16K(2k+1)^2} \left( r_0^2 - x_0^2 + r_0^2 \log \frac{x_0}{r_0} + x_0^2 \log \frac{x_0}{r_0} \right);$$

d'où

$$f' = \frac{3(k+1)\Pi}{12K(2k+1)^2} \left[ \frac{1}{2} (r_0^2 - x_0^2) + x_0^2 \log \frac{x_0}{r_0} \right].$$

Pour  $x_0 = 0$ , on voit que le rapport entre les flèches  $f'$  et  $f$  répondant à l'encastrément et au simple appui est

$$\frac{f'}{f} = \frac{7k+3}{4(3k+1)}, \quad \text{pour } k = \frac{1}{2}, \quad \frac{f'}{f} = \frac{13}{20}.$$

Le théorème établi relativement à la flèche d'une plaque appuyée subsiste ici.

Pour calculer, soit dans ce problème, soit dans le précédent, les fonctions  $W_0$  et  $\zeta$  et par suite les déplacements et les forces élastiques en tout point de la plaque, dans le cas de la force isolée, lequel, en vertu du principe de la superposition des effets des forces élastiques, comprend tous les autres, il faut se rappeler que,  $i$  étant un nombre quelconque, on a, quel que soit  $n$ ,

$$\int_0^{r_0} P_n r^i dr = 0,$$

ou

$$\int_0^{r_0} P_n r^i dr = x_0^{i-1} \int_0^{r_0} P_n r dr = x_0^{i-1} \int_0^{r_0} P_{n-1} r dr = -\frac{3(k+1)}{4K(2k+1)^2} \Pi,$$

suivant que  $r$  est inférieur ou supérieur à  $x_0$ .

*Mouvements vibratoires d'une plaque circulaire libre.*

Passons maintenant au mouvement d'une plaque circulaire.

Les équations du mouvement d'une plaque circulaire libre sont, en posant, pour abrégér,

$$(88) \quad \frac{2}{3} \frac{2k+1}{k+1} \varepsilon^2 \frac{K}{\delta} = \alpha^2,$$

$$(89) \quad \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} + \alpha^2 \Delta_2^2 W_0 = 0,$$

$$(90) \quad \frac{4}{\pi^2} \Delta^2 \zeta - \zeta^2 = 0,$$

avec les conditions à la surface pareilles à celles (57) où la pression extérieure  $\varepsilon$  est supposée nulle, soit, pour  $r = r_0$ ,

$$(91) \quad \begin{cases} -\frac{2k+1}{k+1} \frac{2\varepsilon^2}{3} \frac{\partial \Delta_1 W_0}{\partial r} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \\ \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2} = 0, \\ \frac{1}{r_0} \frac{\partial W_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial r \partial x} = 0. \end{cases}$$

Enfin, pour  $t = 0$ ,

$$(92) \quad W_0 = F(r, \alpha), \quad \frac{\partial W_0}{\partial t} = f(r, \alpha).$$

Pour la recherche de  $W_0$ , on peut procéder comme l'a fait Kirchhoff.

Cherchons d'abord une solution simple de  $W_0$  qui satisfasse aux deux dernières conditions à la surface. Pour cela posons

$$(93) \quad W_0 = R_{n,\lambda} \cos n\alpha (A \cos \lambda^2 at + A' \sin \lambda^2 at),$$

où  $n$  est un nombre entier,  $\lambda^2$  un nombre indéterminé et  $R_{n,\lambda}$  une fonction indéterminée de  $r$  contenant les deux constantes  $n$  et  $\lambda$ .

Nous tirons de là

$$(94) \quad \begin{cases} \Delta_2 W_0 = \left( \frac{\partial^2 R_{n,\lambda}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{n,\lambda}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} R_{n,\lambda} \right) \\ \quad \times \cos n\alpha (A \cos \lambda^2 at + A' \sin \lambda^2 at). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$(95) \quad \frac{\partial^2 R_{n,\lambda}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_{n,\lambda}}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} R_{n,\lambda} = \partial R_{n,\lambda},$$

$$(96) \quad \Delta^2 W_0 = \partial R_{n,\lambda} \cos n\alpha (A \cos \lambda^2 at + A' \sin \lambda^2 at),$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_2^2 W_0 &= \partial \cdot \partial R_{n,\lambda} \cos n\alpha (A \cos \lambda^2 at + A' \sin \lambda^2 at), \\ \frac{\partial^2 W_0}{\partial t^2} &= -\lambda^4 a^2 R_{n,\lambda} \cos n\alpha (A \cos \lambda^2 at + A' \sin \lambda^2 at). \end{aligned}$$

On satisfera donc à l'équation (89) si la fonction  $R_{n,\lambda}$  satisfait à l'équation différentielle du quatrième ordre

$$(97) \quad \partial \cdot \partial R_{n,\lambda} - \lambda^4 R_{n,\lambda} = 0.$$

Si l'on pose

$$\partial R_{n,\lambda} = \lambda^2 S,$$

il vient

$$\partial S = \lambda^2 R_{n,\lambda};$$

d'où, en observant que le  $\partial$  d'une somme est égal à la somme des  $\partial$  de ses parties,

$$(98) \quad \begin{cases} \partial (R_{n,\lambda} + S) = \lambda^2 (R_{n,\lambda} + S), \\ \partial (R_{n,\lambda} - S) = -\lambda^2 (R_{n,\lambda} - S). \end{cases}$$

Posons

$$(99) \quad \begin{cases} R' = \frac{\lambda^n r^n}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left[ 1 + \frac{\lambda^2 r^2}{2(2n+2)} + \frac{\lambda^4 r^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \dots \right], \\ R'' = \frac{\lambda^n r^n}{2 \cdot 4 \dots 2n} \left[ 1 - \frac{\lambda^2 r^2}{2(2n+2)} + \frac{\lambda^4 r^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right]. \end{cases}$$

On satisfera aux deux équations différentielles ci-dessus, en faisant

$$R_{n,\lambda} + S = 2B'R',$$

$$R_{n,\lambda} - S = 2B''R'',$$

$B'$  et  $B''$  étant deux constantes indéterminées; d'où

$$(100) \quad R_{n,\lambda} = B'R' + B''R'',$$

$$(100 \text{ bis}) \quad S = B'R' - B''R'' = \frac{1}{\lambda^2} \partial R_{n,\lambda}.$$

Maintenant les deux dernières conditions à la surface deviennent, si l'on remplace  $W_0$  par sa valeur (93), pour  $r = r_0$ ,

$$\frac{k}{k+1} \partial R_{n,\lambda} + \frac{\partial^2 R_{n,\lambda}}{\partial r^2} = 0,$$

$$\frac{R_{n,\lambda}}{r} + \frac{\partial R_{n,\lambda}}{\partial r} = 0,$$

ou bien

$$\left[ \frac{k}{k+1} \lambda^2 R'_0 + \left( \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} \right)_0 \right] B' + \left[ -\frac{k}{k+1} \lambda^2 R''_0 + \left( \frac{\partial^2 R''}{\partial r^2} \right)_0 \right] B'' = 0,$$

$$\left( \frac{R'_0}{r_0} + \frac{\partial R'}{\partial r} \right)_0 B' + \left[ \frac{R''_0}{r_0} + \left( \frac{\partial R''}{\partial r} \right)_0 \right] B'' = 0.$$

Si l'on élimine le rapport  $\frac{B'}{B''}$ ,

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{k}{k+1} \lambda^2 R'_0 + \left( \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} \right)_0 \right] \left[ \frac{R''_0}{r_0} + \left( \frac{\partial R''}{\partial r} \right)_0 \right] \\ - \left[ -\frac{k}{k+1} \lambda R''_0 + \left( \frac{\partial R''}{\partial r^2} \right)_0 \right] \left[ \frac{R'_0}{r_0} + \left( \frac{\partial R'}{\partial r} \right)_0 \right] = 0, \end{array} \right.$$

équation en  $\lambda$  dont les racines fournissent les valeurs qu'il faut adopter pour cette quantité, pour chaque valeur de l'entier  $n$ . Ces racines sont toutes réelles en vertu d'une formule bien connue que nous utiliserons plus loin.

La dernière équation donne ensuite

$$\frac{B'}{r} + \left(\frac{\partial B''}{\partial r}\right)_0 = - \frac{B''}{\left[\frac{R'_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R'}{\partial r}\right)_0\right]}.$$

Nous pouvons, sans diminuer la généralité de l'expression de  $W_0$ , prendre ces deux rapports égaux à l'unité, en sorte que

$$B' = \frac{R'_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R''}{\partial r}\right)_1,$$

$$B'' = - \left[\frac{R'_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R'}{\partial r}\right)_0\right],$$

et, par suite

$$R_{n,\lambda} = \left[\frac{R'_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R''}{\partial r}\right)_0\right] R' - \left[\frac{R'_0}{r_0} + \left(\frac{\partial R'}{\partial r}\right)_0\right] R'',$$

fonction complètement déterminée.

Nous satisfaisions encore aux deux dernières conditions (91) et à l'équation différentielle (89) en prenant pour  $W_0$  la somme d'un nombre infini de termes analogues au second membre de (93) et se rapportant à toutes les valeurs entières de  $n$  et à toutes les racines  $\lambda$  de l'équation (101), soit

$$(102) \quad W_0 = \sum_{n,\lambda} R_{n,\lambda} \cos n\alpha (A \cos \lambda^2 at + A' \sin \lambda^2 at).$$

Il faut enfin satisfaire aux conditions initiales, ce qui donne

$$\sum_{n,\lambda} A R_{n,\lambda} \cos n\alpha = F(r, \alpha),$$

$$\sum_{n,\lambda} \lambda^2 A' R_{n,\lambda} \cos n\alpha = \frac{r}{a} f(r, \alpha),$$

qui doivent avoir lieu de  $\alpha = 0$  à  $\alpha = 2\pi$  et de  $r = 0$  à  $r = r_0$ . On démontre, d'après des formules connues, que, pour deux valeurs différentes de  $\lambda$ , on a

$$\int_0^{r_0} R_{n,\lambda} R_{n,\lambda'} r^2 dr = 0.$$

Par suite, on tire de ces équations pour les coefficients restant à déterminer

$$(103) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} R_{n,\lambda} F(r,z) \cos n\alpha r dr dz}{\pi \int_0^{r_0} R_{n,\lambda}^2 r^2 dr}, \\ A' &= \frac{1}{\lambda^2 a \pi} \frac{\int_0^{r_0} \int_1^{2\pi} R_{n,\lambda} f(r,z) \cos n\alpha r dr dz}{\pi \int_0^{r_0} R_{n,\lambda}^2 r^2 dr}, \end{aligned} \right.$$

en sorte que  $W_0$  est complètement déterminé.

En désignant, comme précédemment, par  $R$  la série (62 bis), on satisfera à l'équation (90) en posant

$$(103 \text{ bis}) \quad \zeta = \sum_{n,k} MR \sin n\alpha (A \cos \lambda^2 at + A' \sin \lambda^2 at),$$

où l'on doit observer que  $R$  ne contient que la constante  $n$  et non celle  $\lambda$ .  $A$  et  $A'$  sont les constantes définies par les équations (103) et  $M$  des constantes indéterminées. La première condition (91), la seule non encore remplie, donnera pour définir le coefficient  $M$

$$\frac{nR_0}{r_0} M - \frac{2k+1}{k+1} \frac{2\varepsilon^3}{3} (\partial R_{n,\lambda})_0 = 0,$$

ou, en vertu de (95),

$$M = \frac{2k+1}{k+1} \frac{2\varepsilon^3}{3} \frac{\lambda^2 r_0}{nR_0} \left[ \frac{2R'_0 R_0^*}{r_0} + R'_0 \left( \frac{\partial R''}{\partial r} \right)_0 + R_0^* \left( \frac{\partial R'}{\partial r} \right)_0 \right].$$

*Mouvements vibratoires dans une plaque appuyée sur son pourtour.*

Les conditions à la surface sont ici

$$W_0 = 0,$$



et celles (67)

$$(104) \quad \begin{cases} - \left( \frac{k}{k+1} \Delta_2 W_0 + \frac{\partial^2 W_0}{\partial r^2} \right) + \frac{12}{\pi^2 \varepsilon} \left( \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r \partial z} \right) = 0, \\ \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial W_0}{\partial z} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 W_0}{\partial r \partial z} + \frac{3}{2\pi^2 \varepsilon} \left( \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) = 0. \end{cases}$$

On peut toujours prendre pour  $W_0$  l'expression (102), où  $R_{n,\lambda}$  a la forme (100), et pour valeur correspondante de  $\zeta$  le terme correspondant de la série qui forme le second membre de (103 bis), soit

$$\zeta = MR \sin n\alpha (\Lambda \cos \lambda^2 at + A' \sin \lambda^2 at).$$

Si l'on porte ces expressions dans les trois conditions à la surface, elles deviennent

$$\begin{aligned} B' R'_0 + B'' B''_0 &= 0, \\ - \left[ \frac{k}{k+1} \lambda^2 R'_0 + \left( \frac{\partial^2 R'}{\partial r^2} \right)_0 \right] B' + \left[ \frac{\zeta k}{k+1} \lambda^2 R''_0 \left( \frac{\partial^2 R''}{\partial r^2} \right)_0 \right] B'' \\ &\quad + \frac{12n}{\pi^2 \varepsilon} \left[ \frac{-R_0}{r_0} + \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right)_0 \right] M = 0, \\ n \left( \frac{\partial R'}{\partial r} \right)_0 B' + n \left( \frac{\partial R''}{\partial r} \right)_0 B'' + \frac{3}{2\pi^2 \varepsilon} \left[ \frac{-n^2}{r_0^2} R_0 - \left( \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right)_0 + \frac{1}{r_0} \left( \frac{\partial R}{\partial r} \right)_0 \right] M &= 0. \end{aligned}$$

Si, entre ces trois équations homogènes par rapport à  $B'$ ,  $B''$ ,  $M$ , on élimine ces trois constantes, on obtiendra une équation en  $\lambda^2$  dont les racines fourniront les valeurs à adopter pour cette constante.

Les trois équations se réduiront alors à deux, par exemple la première et la dernière; de la première on déduit

$$\frac{B'}{R'_0} = - \frac{B''}{R''_0},$$

et l'on peut prendre simplement

$$B' = R''_0, \quad B'' = -R'_0.$$

Par suite, la dernière donne la valeur de  $M$ ; ces trois séries de constantes sont ainsi entièrement déterminées.

En prenant ensuite pour  $W_0$  et  $\zeta$  les séries complètes, telles que (102) et (103 bis), il ne restera plus que les constantes  $A$  et  $A'$  à déterminer, ce qui se fera comme dans le cas précédent.

On voit que, pour  $n = 0$ ,  $M = 0$ , ce qui montre que  $\zeta$  n'a pas de terme correspondant à  $n = 0$ ; et si l'état initial de la plaque était symétrique tout autour du centre, c'est-à-dire indépendant de  $\alpha$ , il en serait de même pendant toute la durée du mouvement; les séries se réduiraient chacune au terme correspondant à  $n = 0$ ; par suite, la fonction  $\zeta$  ne s'introduirait pas, et les formules données par Poisson, dans ce cas particulier, le seul qu'il ait traité, se trouveraient être exactes. Cela tient aux mêmes raisons que dans le cas de l'équilibre.

Cherchons la flèche  $f$  au centre. On l'obtiendra en faisant, dans l'expression de  $W_0$ ,  $r = 0$ .

Mais, pour  $r = 0$ , on a  $R_{n,\lambda} = 0$ , pour toutes les valeurs de  $n$  autres que  $n = 0$ , comme cela résulte de l'expression (100) de  $R_{n,\lambda}$  et de ce que les fonctions  $R'$  et  $R''$ , qui sont des séries (62 bis), s'annulent pour  $r = 0$ , sauf lorsque  $n = 0$ .

Donc, dans la double somme  $\sum_{n,\lambda}$  qui fournit la valeur générale  $W_0$ , tous les termes relatifs à  $n$  disparaissent, sauf ceux relatifs à  $n = 0$ , et l'expression de la flèche est fournie par une somme simple  $\sum$  relative aux différentes valeurs de  $\lambda$ , à savoir

$$f = \sum_{\lambda} R_{0,\lambda} (A \cos \lambda^2 at + A' \sin \lambda^2 at),$$

ou

$$A = \frac{\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} R_{0,\lambda} F(r, \alpha) r \, dr \, d\alpha}{\pi \int_0^{r_0} R_{0,\lambda}^2 r^2 \, dr},$$

$$A' = \frac{\int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} R_{0,\lambda} f(r, \alpha) r \, dr \, d\alpha}{\pi \int_0^{r_0} R_{0,\lambda}^2 r^2 \, dr}.$$

Posons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \alpha) d\alpha = \Phi(r),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \alpha) d\alpha = \varphi(r),$$

en sorte que  $\Phi$  et  $\varphi$  représentent respectivement les déplacements *moyens* et les vitesses *moyennes* imprimés à l'instant initial aux points du plan moyen situés sur la circonférence de rayon  $r$ .

On aura alors

$$A = 2 \frac{\int_0^{r_0} R_{0,\lambda} \Phi(r) r dr}{\int_0^{r_0} R_{0,\lambda}^2 r dr},$$

$$A' = 2 \frac{\int_0^{r_0} R_{0,\lambda} \varphi(r) r dr}{\int_0^{r_0} R_{0,\lambda}^2 r dr}.$$

On voit que  $A$  et  $A'$  et par suite la flèche  $f$  ne dépendent pas du déplacement initial  $F(r, \alpha)$  et de la vitesse initiale  $f(r, \alpha)$  de chaque point de la plaque, mais seulement du déplacement initial moyen  $\Phi(r)$  et de la vitesse initiale moyenne  $\varphi(r)$ . Ainsi on a ce théorème analogue à celui trouvé dans le problème de l'équilibre de la plaque appuyée.

*Lorsqu'une plaque circulaire appuyée sur son pourtour est en mouvement vibratoire, le mouvement de son centre ne dépend pas de la position et de la vitesse initiale de chacun de ses points, mais seulement des positions et vitesses initiales moyennes des points placés sur chacun des cylindres concentriques à la plaque.*

*Mouvements vibratoires de la plaque circulaire encastrée  
sur son pourtour.*

Si la plaque est encastrée sur son pourtour, les trois conditions à la surface sont

$$W_0 = 0, \quad \frac{\partial W_0}{\partial r} = 0,$$

et la dernière (104) qui, en vertu des deux précédentes, se réduit à

$$\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial \zeta}{\partial r} = 0.$$

Il résulte de là que la fonction  $\zeta$  est ici nulle. On satisfait, en effet, à la dernière condition et à l'équation à différences partielles relative à  $\zeta$  par  $\zeta = 0$ .

Le problème ne comporte donc ici qu'une inconnue comme dans le cas de la plaque encastrée en équilibre.

En adoptant toujours pour  $W_0$  l'expression simple (93) où  $R_{n,\lambda}$  est représenté par la somme (100), les deux conditions à remplir par la fonction  $W_0$  sont

$$\begin{aligned} B' R'_0 + B'' R''_0 &= 0, \\ B' \left( \frac{\partial R'}{\partial r} \right)_0 + B'' \left( \frac{\partial R''}{\partial r} \right)_0 &= 0; \end{aligned}$$

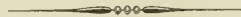
d'où, pour l'équation en  $\lambda^2$ ,

$$R'_0 \left( \frac{\partial R''}{\partial r} \right)_0 - R''_0 \left( \frac{\partial R'}{\partial r} \right)_0 = 0;$$

on peut prendre

$$B' = R''_0, \quad B'' = -R'_0,$$

en sorte que  $R_{n,\lambda}$  sera entièrement déterminé. La recherche des coefficients  $A'$  et  $A''$  se fera comme précédemment, et le théorème que nous avons établi sur le mouvement du centre de la plaque appuyée se trouve également vrai ici.



*De la déformation qu'éprouve une pièce à simple ou à double courbure sous l'action de forces qui lui font subir en même temps une flexion et une torsion [ \* ] ;*

PAR M. H. RESAL.

Cette question offre, même en dehors des applications, un certain intérêt. Elle conduit en effet au problème suivant :

*Déterminer la forme d'une courbe à double courbure, dont les rayons de courbure et de torsion sont donnés en fonction de l'arc.*

I. — *Rappel des formules relatives aux deux courbures d'une courbe.*

Soient

$Ox, Oy, Oz$  trois axes rectangulaires ;

$x, y, z$  les coordonnées d'un point  $m$  d'une courbe ;

$\alpha, \beta, \gamma$  les angles formés par la tangente en  $m$  avec  $Ox, Oy, Oz$  ;

$\alpha', \beta', \gamma'$  et  $\alpha'', \beta'', \gamma''$  les angles semblables relatifs à la normale principale et la binormale ;

$ds$  l'élément de l'arc ;

$\rho, \tau$  les rayons de courbure et de torsion ;

On a

$$(1) \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds} ;$$

$$(2) \quad \cos \alpha' = \rho \frac{d \cos \alpha}{ds}, \quad \cos \beta' = \rho \frac{d \cos \beta}{ds}, \quad \cos \gamma' = \rho \frac{d \cos \gamma}{ds} ;$$

$$(3) \quad \cos \alpha'' = \tau \frac{d \cos \alpha'}{ds}, \quad \cos \beta'' = \tau \frac{d \cos \beta'}{ds}, \quad \cos \gamma'' = \tau \frac{d \cos \gamma'}{ds} ;$$

[ \* ] Les premières recherches sur ce sujet sont dues à M. de Saint-Venant (*Comptes*

Les équations (2) et (3) peuvent être remplacées par les quatre suivantes, obtenues en éliminant  $\cos\alpha'$ ,  $\cos\beta'$ ,  $\cos\gamma'$  et en exprimant que la somme des carrés de ces cosinus est égale à l'unité :

$$\frac{d \cos \alpha''}{ds} = \frac{\rho}{\tau} \frac{d \cos \alpha}{ds}, \quad \frac{d \cos \beta''}{ds} = \frac{\rho}{\tau} \frac{d \cos \beta}{ds}, \quad \frac{d \cos \gamma''}{ds} = \frac{\rho}{\tau} \frac{d \cos \gamma}{ds},$$

$$\left( \frac{d \cos \alpha}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d \cos \beta}{ds} \right)^2 + \left( \frac{d \cos \gamma}{ds} \right)^2 = \frac{1}{\rho^2}.$$

Si nous posons, pour simplifier l'écriture,

$$(4) \quad \begin{cases} \cos \alpha = a, & \cos \beta = b, & \cos \gamma = c, \\ \cos \alpha'' = a'', & \cos \beta'' = b'', & \cos \gamma'' = c'', \end{cases}$$

les équations ci-dessus prendront la forme suivante :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{da''}{ds} = \frac{\rho}{\tau} \frac{da}{ds}, & \frac{db''}{ds} = \frac{\rho}{\tau} \frac{db}{ds}, & \frac{dc''}{ds} = \frac{\rho}{\tau} \frac{dc}{ds}, \\ \frac{da^2}{ds^2} + \frac{db^2}{ds^2} + \frac{dc^2}{ds^2} = \frac{1}{\rho^2}, \end{cases}$$

et l'on aura de plus

$$(6) \quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1. \end{cases}$$

Si  $\rho$  et  $\tau$  sont donnés en fonction de  $s$ , les six équations (5) et (6) feront connaître  $a, b, c; a'', b'', c''$ , par suite,  $x, y, z$  en fonction de  $s$ , ce qui permettra d'obtenir les équations de la courbe.

## II. — Faible déformation d'une courbe.

Supposons que l'on fasse subir aux rayons de courbure et de torsion d'une courbe donnée et suivant une loi déterminée des variations assez petites pour qu'on puisse en négliger les puissances d'un ordre supé-

---

*rendus de l'Académie des Sciences, séances du 30 octobre et du 6 novembre 1844*); mais nous avons employé une méthode différente de celle de ce savant.

rier au premier. Nous distinguerons par l'indice 0 les quantités qui se rapportent à la forme primitive de la courbe et nous poserons

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \delta\rho, & \tau &= \tau_0 + \delta\tau, \\ a &= a_0 + \delta a, & b &= b_0 + \delta b, & c &= c_0 + \delta c; \\ a'' &= a''_0 + \delta a'', & b'' &= b''_0 + \delta b'', & c'' &= c''_0 + \delta c''; \\ x &= x_0 + \delta x, & y &= y_0 + \delta y, & z &= z_0 + \delta z. \end{aligned}$$

Les équations (5) et (6), différenciées par rapport à la caractéristique  $\delta$ , donnent

$$(5') \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\delta a''}{ds} &= \frac{\rho_0}{\tau_0} \frac{d\delta a}{ds} + \delta \frac{\rho}{\tau} \frac{da_0}{ds}, \\ \frac{d\delta b''}{ds} &= \frac{\rho_0}{\tau_0} \frac{d\delta b}{ds} + \delta \frac{\rho}{\tau} \frac{db_0}{ds}, \\ \frac{d\delta b''}{ds} &= \frac{\rho_0}{\tau_0} \frac{d\delta c}{ds} + \delta \frac{\rho}{\tau} \frac{dc_0}{ds}, \\ \frac{da_0}{ds} \frac{d\delta a}{ds} + \frac{db_0}{ds} \frac{d\delta b}{ds} + \frac{dc_0}{ds} \frac{d\delta c}{ds} &= -\frac{\delta \rho}{\rho_0^2}. \end{aligned} \right.$$

$$(6') \quad \left\{ \begin{aligned} a_0 \delta a + b_0 \delta b + c_0 \delta c &= 0, \\ a''_0 \delta a'' + b''_0 \delta b'' + c''_0 \delta c'' &= 0, \end{aligned} \right.$$

formules qui permettront d'obtenir les variations des cosinus.

Les équations (1) donnent

$$\delta a = \frac{d\delta x}{ds}, \quad \delta b = \frac{d\delta y}{ds}, \quad \delta c = \frac{d\delta z}{ds},$$

d'où

$$\delta x = f \delta a ds, \quad \delta y = f \delta b ds, \quad \delta z = f \delta c ds.$$

### III. — Cas où la courbe est primitivement plane.

Prenons le plan de cette courbe pour celui des  $xy$ . Les formules du numéro précédent ne peuvent pas s'appliquer ici, comme il est facile de le reconnaître.

Nous avons

$$a''_0 = 0, \quad b''_0 = 0, \quad c''_0 = 1, \quad \frac{1}{\tau_0} = 0,$$

$$a'' = \delta a'', \quad b'' = \delta b'', \quad a = a_0 + \delta a, \quad b = b_0 + \delta b, \quad c_0 = 0, \quad c = \delta c.$$

Les deux premières des formules (5) deviennent

$$\frac{d\delta a''}{ds} = \frac{\rho}{\tau} \left( \frac{da_0}{ds} + \frac{d\delta a}{ds} \right),$$

$$\frac{d\delta b''}{ds} = \frac{\rho}{\tau} \left( \frac{db_0}{ds} + \frac{d\delta b}{ds} \right),$$

ou plus simplement

$$(7) \quad \frac{d\delta a''}{ds} = \frac{\rho_0}{\tau} \frac{da_0}{ds}, \quad \frac{d\delta b''}{ds} = \frac{\rho_0}{\tau} \frac{db_0}{ds},$$

d'où

$$(8) \quad \delta a'' = \int \frac{\rho_0}{\tau} da_0, \quad \delta b'' = \int \frac{\rho_0}{\tau} db_0.$$

La seconde des équations (6) donne, en conservant les termes du second ordre,

$$c'' = \sqrt{1 - (\delta a''^2 + \delta b''^2)} = 1 - \frac{1}{2} (\delta a''^2 + \frac{1}{2} \delta b''^2);$$

d'où

$$\delta c'' = -\frac{1}{2} (\delta a''^2 + \delta b''^2),$$

et, en ayant égard aux formules (7),

$$\frac{d\delta c''}{ds} = -\frac{\rho_0}{\tau} \left( \delta a'' \frac{da_0}{ds} + \delta b'' \frac{db_0}{ds} \right).$$

En portant cette valeur dans la troisième des équations (5), on trouve

$$(9) \quad \delta c = -\int (\delta a'' da_0 + \delta b'' db_0).$$

La quatrième des équations (5) et la première des équations (6)



deviennent, en négligeant les termes du second ordre,

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{da_0}{ds} \frac{d\delta a}{ds} + \frac{db_0}{ds} \frac{d\delta b}{ds} = -\frac{\delta p}{p_0^2}, \\ a\delta a + b\delta b = 0. \end{cases}$$

et feront connaître  $\delta a$  et  $\delta b$ , qui auront les mêmes valeurs que si la courbe ne s'était pas voilée.

#### IV. — Formules relatives à la flexion et à la torsion simultanées d'une pièce homogène soumise à l'action de forces extérieures.

Considérons une pièce homogène engendrée par un profil plan invariable qui reste normal à la courbe décrite par le centre de gravité de son aire, et de manière qu'un même rayon vecteur coïncide constamment avec la direction de courbure de la courbe qui est la fibre moyenne de la pièce.

Concevons une portion de la pièce limitée par une section normale déterminée.

Soient

O le centre de gravité de la section ;

O $\eta$ , O $\zeta$  ses axes principaux d'inertie ;

O $\xi$  la tangente en O à la fibre moyenne ;

I $\eta$ , I $\zeta$ , I $\xi$  les moments d'inertie de la section par rapport aux axes

O $\eta$ , O $\zeta$ , O $\xi$  ;

E,  $\mu$  les coefficients d'élasticité et de glissement de la matière.

Sous l'action de forces extérieures, la portion considérée de la pièce se déformera ; les éléments linéaires et les rayons de courbure et de torsion de la fibre moyenne éprouveront des variations. Mais, dans ce qui suit, nous négligerons les dilatations et contractions de la fibre moyenne, qui sont toujours très-petites.

Si nous transportons les forces extérieures parallèlement à elles-mêmes au point O, nous obtiendrons un couple dont l'axe se décomposera en deux autres ; l'un  $\mathfrak{M}_\xi$  suivant O $\xi$ , l'autre  $\mathfrak{M}_\eta$  situé dans le

plan de la section. Le premier de ces moments est le moment de torsion et l'autre le moment fléchissant. Nous désignerons par  $\varepsilon$  l'angle formé avec  $O\xi$  par la trace du couple de moment  $\partial\pi_f$  sur le plan de la section.

Soient, après la déformation,  $\rho$ ,  $\tau$  les rayons de courbure et de torsion de la fibre moyenne;  $\varphi$  l'angle formé par la direction de  $\rho$  avec  $O\eta$ ; nous distinguerons par l'indice 0 les quantités qui se rapportent à l'état naturel de la pièce.

On a, pour déterminer  $\rho$  et  $\varphi$ , les formules suivantes [\*] :

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{\left(\partial\pi_f \sin \varepsilon + \frac{EI_z}{\rho_0} \cos \varphi_0\right)^2}{I_z^2} + \frac{\left(\partial\pi_f \cos \varepsilon - \frac{EI_\eta}{\rho_0} \sin \varphi_0\right)^2}{I_\eta^2}}, \\ \operatorname{tang} \varphi = \frac{\frac{\partial\pi_f}{EI_z} \cos \varepsilon - \frac{\sin \varphi_0}{\rho_0}}{\frac{\partial\pi_f}{EI_z} \sin \varepsilon + \frac{\cos \varphi_0}{\rho_0}}. \end{array} \right.$$

Dans le cas où la direction du rayon de courbure  $\rho_0$  coïncide avec celle de l'axe d'inertie  $O\eta$  et où la trace du plan du couple fléchissant sur le plan de la section est perpendiculaire à la même direction, on a  $\varepsilon = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ , par suite

$$(11') \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \sqrt{1 + \frac{\partial\pi_f^2 \rho_0^2}{EI_z^2}}, \quad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\partial\pi_f \rho_0}{EI_z}.$$

Si  $\partial\pi_f$  et  $\partial\pi_z$  sont du même ordre de grandeur et si les effets de la torsion sont très-petits, la différence  $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}$  sera du second ordre, de sorte que l'on pourra considérer la courbure comme n'ayant pas varié.

On doit à M. de Saint-Venant la formule suivante [\*\*], qui fait

[\*] Voir mon *Traité de Mécanique générale*, t. II, p. 110.

[\*\*] Soient  $ab$ ,  $bc$ ,  $cd$  trois éléments consécutifs de la fibre moyenne à l'état naturel,  $pp'$  et  $pp''$  les sections normales en  $b$ ,  $c$ . Comme la déformation ne dépend que de déplacements relatifs, on peut considérer l'élément intermédiaire  $bc$  comme fixe. Les

connaître la variation éprouvée par la seconde courbure de la fibre moyenne

$$(12) \quad \mu I_{\xi} \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} + \frac{d\xi}{ds} \right) = \partial \mathcal{K}_{\xi}.$$

Nous allons appliquer les formules qui précèdent à quelques exemples auxquels M. de Saint-Venant avait déjà appliqué ses formules, dès 1843.

V. — *Arc de cercle horizontal, dont l'une des extrémités est encastrée suivant un rayon et soumis à l'autre extrémité à l'action d'un poids.*

Nous supposons que l'un des axes principaux d'inertie de la section coïncide avec la direction du rayon de courbure  $\rho_0$  et que les

plans osculateurs  $abc$ ,  $bcd$  entraînant avec eux  $pp$  et  $p'p'$ , se sont déplacés l'un par rapport à l'autre de

$$\frac{ds}{\tau} - \frac{ds}{\tau_0}.$$

Les formules (11) supposent que l'angle  $\varphi$  décroît quand  $\partial \mathcal{K}_{\xi}$  augmente.

Le plan  $pp$  s'est donc déplacé par rapport au plan  $abc$  de  $\varphi_0 - \varphi$ , et  $p'p'$ , par rapport à  $bcd$ , de  $\varphi_0 - \left( \varphi + \frac{d\varphi}{ds} \right)$ ; d'où il résulte que le déplacement angulaire total de  $p'p'$  par rapport à  $pp$  est

$$ds \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} - \frac{d\varphi}{ds} \right).$$

L'angle de torsion est ainsi

$$\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} - \frac{d\varphi}{ds}.$$

La force de torsion développée dans l'élément  $d\omega$  de  $pp$ , situé à la distance  $r$  de  $bc$ , étant

$$\mu r d\omega \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} + \frac{d\varphi}{ds} \right),$$

on a, pour le moment de torsion,

$$\mu \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} - \frac{d\varphi}{ds} \right) \int r^2 d\omega.$$

déplacements sont très-petits. D'après la première des formules (11'), on pourra négliger la variation éprouvée par la courbure.

Soient

A l'encastrement;

AB la fibre moyenne à l'état naturel;

P le poids qui est adapté à l'extrémité B;

$\theta_1$  l'angle au centre AOB;

$\theta$  l'angle formé avec OA pris pour axe des  $x$ , par un rayon Om mené en un point quelconque  $m$  de l'arc;

Oz la verticale du point O.

Nous avons

$$ds = \rho_0 d\theta, \quad \frac{1}{\tau_0} = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

$$\partial \pi_f = -P\rho_0 \sin(\theta_1 - \theta), \quad \partial \pi_z = P\rho_0 [1 - \cos(\theta_1 - \theta)],$$

et, d'après la seconde des formules (11'),

$$\text{tang } \varphi = -\frac{P\rho_0^2}{EI_\eta} \sin(\theta_1 - \theta);$$

d'où, en remarquant que, par hypothèse,  $\varphi$  est un petit angle,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{P\rho_0}{EI_\eta} \cos(\theta_1 - \theta).$$

Si nous posons

$$(a) \quad \frac{P\rho_0}{\mu I_z} = \frac{1}{h}, \quad P\rho_0 \left( \frac{1}{EI_\eta} - \frac{1}{\mu I_z} \right) = \frac{1}{h},$$

la formule (12) donne

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h} \cos(\theta_1 - \theta).$$

Nous avons maintenant

$$a_0 = 90^\circ + \theta, \quad \beta_0 = -\theta, \quad a_0 = -\sin\theta, \quad b_0 = \cos\theta,$$

$$\frac{da_0}{d\theta} = -\cos\theta, \quad \frac{db_0}{d\theta} = -\sin\theta,$$

et, en raison de l'encastrement, les conditions

$$\delta a'' = 0, \quad \delta b'' = 0, \quad \delta c'' = 0, \quad \delta c = 0 \quad \text{pour} \quad \vartheta = 0.$$

Les formules (8) donnent, par suite,

$$(13) \left\{ \begin{aligned} \delta a'' &= -\rho_0 \int_0^{\vartheta} \left[ \frac{1}{h} + \frac{1}{k} \cos(\vartheta_1 - \vartheta) \right] \cos \vartheta d\vartheta \\ &= -\frac{\rho_0}{h} \sin \vartheta - \frac{\rho_0}{2k} \left[ \vartheta \cos \vartheta_1 - \frac{1}{2} \sin(\vartheta_1 - 2\vartheta) + \frac{1}{2} \sin \vartheta_1 \right], \\ \delta b'' &= -\rho_0 \int_0^{\vartheta} \left[ \frac{1}{h} + \frac{1}{k} \cos(\vartheta_1 - \vartheta) \right] \sin \vartheta d\vartheta \\ &= -\frac{\rho_0}{h} (1 - \cos \vartheta) - \frac{\rho_0}{2k} \left[ \vartheta \sin \vartheta_1 + \frac{1}{2} \cos(\vartheta_1 - 2\vartheta) - \frac{1}{2} \cos \vartheta_1 \right]. \end{aligned} \right.$$

En portant ces valeurs dans la formule (9), on trouve

$$\begin{aligned} \delta c &= \frac{\rho_0}{h} (1 - \cos \vartheta) \\ &\quad + \frac{\rho_0}{2k} \left[ -\vartheta \sin \vartheta_1 - \vartheta_1 - \frac{1}{6} \cos(\vartheta_1 - 3\vartheta) + \frac{3}{2} \cos(\vartheta_1 - \vartheta) \right], \end{aligned}$$

et enfin on a

$$\begin{aligned} \delta z = \rho_0 \int_0^{\vartheta} \delta c d\vartheta &= \frac{\rho_0^2}{h} (\vartheta - \sin \vartheta) + \frac{\rho_0^2}{2k} \left[ -\vartheta \cos(\vartheta_1 - \vartheta) - \frac{5}{2} \sin(\vartheta_1 - \vartheta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{18} \sin(\vartheta_1 - 3\vartheta) - \frac{23}{9} \sin \vartheta_1 \right], \end{aligned}$$

équation qui détermine la forme de la courbe en projection sur les plans  $zOx$  et  $zOy$ .

VI. — *Cercle reposant par les deux extrémités d'un même diamètre sur deux appuis de niveau et soumis à l'action de deux poids égaux accrochés aux extrémités du diamètre perpendiculaire au précédent.*

Soient

O le centre du cercle;

A l'un des points d'appui;

B le point de l'un des demi-cercles où est suspendu un poids  $2P$ .

Prenons les directions de OA et OB pour celles des axes des  $x$  et des  $y$ . Comme dans la question précédente, nous pourrions négliger la variation de la courbure.

En raison de la symétrie, il ne se développera pas de couple de torsion dans la section B. En considérant le demi-cercle limité par le point B et le point qui lui est diamétralement opposé, on reconnaît sans peine qu'il ne se développe, dans les deux sections extrêmes, ni résultante, ni couples élastiques. La force qui agit sur chaque quart de cercle est P et nous poserons, comme plus haut,

$$\frac{P\rho_0}{\mu I_z} = \frac{1}{h}, \quad P\rho_0 \left( \frac{1}{EI_x} - \frac{1}{\mu I_z} \right) = \frac{1}{k}.$$

On remarquera que l'axe du plan osculateur au point B reste dans le plan  $yOz$  après la déformation, de sorte que, pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta a''$  est nul, et  $\delta b''$  prend une certaine valeur qui doit résulter de la solution du problème. En partant de là, on déduit facilement des formules (13), en y supposant  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\delta a'' = \frac{\rho_0}{h} (1 - \sin \theta) + \frac{\rho_0}{4k} (1 + \cos 2\theta),$$

$$\delta b'' = \frac{\rho_0}{h} \cos \theta - \frac{\rho_0}{2k} \left( \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + C,$$

C étant une constante.

La formule (9) donne, par suite, en exprimant que  $\delta c$  est nul pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \delta c = & -\frac{\rho_0}{h} (1 - \sin \theta - \cos \theta) \\ & + \frac{\rho_0}{2k} \left[ -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{6} \sin 3\theta + \theta \cos \theta + \frac{2}{3} (1 - \cos \theta) \right]. \end{aligned}$$

On trouve ensuite, en remarquant que  $\delta z$  est nul pour  $\theta = 0$ ,

$$\begin{aligned} \delta z = & -\frac{\rho_0}{h} (\theta + \cos \theta - \sin \theta - 1) \\ & + \frac{\rho_0}{2k} \left( \frac{3}{2} \cos \theta - \frac{1}{18} \cos 3\theta + \theta \sin \theta + \frac{2}{3} \theta - \frac{2}{3} \sin \theta - \frac{13}{9} \right). \end{aligned}$$

La flèche  $f$  ou la valeur  $\partial z$  pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$  a pour valeur

$$f = \frac{\rho_0}{h} \left( 2 - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\rho_0}{2k} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{19}{9} \right).$$

Les considérations précédentes sont applicables au cas d'un demi-cercle horizontal dont les extrémités seraient encastrées.

VII. — *Ressort à boudin vertical encastré par son extrémité supérieure et à l'autre extrémité duquel est accroché un poids.*

Nous ne considérerons que le cas des faibles déformations, le seul dans lequel on puisse arriver à quelques résultats intéressants.

Soient

$i$  l'inclinaison de l'hélice sur l'horizon ;

$R$  le rayon du cylindre sur lequel elle est tracée ;

$Ox, Oy$  deux droites rectangulaires passant par le centre  $O$  de la base supérieure du cylindre, comprises dans le plan de cette base, dont la première passe par l'encastrement  $A$  ;

$\theta$  l'angle formé avec  $Ox$  par le rayon mené à la projection  $n$ , sur le plan  $xOy$ , d'un point quelconque  $m$  de l'hélice ;

$2n\pi$  la valeur de  $\theta$  correspondant à l'extrémité libre du ressort où est accroché le poids  $P$ ,  $n$  étant un nombre entier.

En négligeant la déformation, le point d'application de  $P$  est projeté en  $A$ .

Nous avons

$$\rho_0 = \frac{R}{\cos^2 i}, \quad \tau_0 = \frac{R}{\sin i \cos i}, \quad \frac{\rho_0}{\tau_0} = \tan g i, \quad s = \frac{R \theta}{\cos i}, \quad ds = \frac{R}{\cos i} d\theta,$$

$$a_0 = -\sin \theta \cos i, \quad b_0 = \cos \theta \cos i, \quad c_0 = \sin i.$$

$$\frac{da_0}{d\theta} = -\cos \theta \cos i, \quad \frac{db_0}{d\theta} = -\sin \theta \cos i, \quad \frac{dc_0}{d\theta} = 0,$$

$$a_0'' = \sin \theta \sin i, \quad b_0'' = -\cos \theta \sin i, \quad c_0'' = \cos i.$$

Le moment du couple obtenu, en transportant la force  $P$  parallè-

lement à elle-même en  $m$  ou  $n$ , se décompose en deux autres, l'un,  $PR \sin \theta$ , dont l'axe est  $nO$ , et l'autre,  $PR(1 - \cos \theta)$ , dont l'axe est la tangente en  $n$  à la circonférence de la base du cylindre. Ce dernier se décompose lui-même en deux autres, l'un  $PR(1 - \cos \theta) \cos i$ , suivant la tangente à l'hélice qui produit la torsion, et l'autre  $PR(1 - \cos \theta) \sin i$ , suivant la perpendiculaire au plan osculateur, et qui diminue la courbure de la pièce. Il résulte de là que l'on a

$$\partial \kappa_z = PR(1 - \cos \theta) \cos i,$$

et que le moment fléchissant se compose des deux suivants (4) :

$$(b) \quad \partial \kappa_f \cos \varepsilon = PR \sin \theta \dots \dots \dots \text{ suivant } Ox,$$

$$(e) \quad \partial \kappa_f \sin \varepsilon = -PR(1 - \cos \theta) \sin i \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \text{suivant la perpendiculaire} \\ \text{au plan osculateur.} \end{array} \right.$$

Si nous supposons que la section de la pièce ait un axe principal d'inertie dirigé suivant le rayon de courbure, nous aurons  $\varphi_0 = 0$ , et les formules (11) et (12) nous donneront, en continuant à négliger les quantités du second ordre,

$$\begin{aligned} \partial \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = -\frac{PR(1 - \cos \theta) \sin i}{EI_z}, \\ \tan g \varphi &= \frac{PR^2 \sin \theta}{EI_y \cos^2 i}, \\ \frac{d\varphi}{ds} &= \frac{PR \cos \theta}{EI_y \cos i}, \\ \partial \frac{1}{\tau} &= PR \left[ \frac{(1 - \cos \theta) \cos i}{\mu I_z} + \frac{\cos \theta}{EI_y \cos i} \right]. \end{aligned}$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} \partial \frac{\rho}{\tau} &= \rho_0 \partial \frac{1}{\tau} - \frac{\rho_0^2}{\tau_0} \partial \frac{1}{\rho} = \frac{PR^2}{\cos i} \left( \frac{1}{\mu I_z} + \frac{\tan g^2 i}{2 EI_y} \right) \\ &+ \frac{PR^2}{\cos i} \left( \frac{1}{EI_y \cos^2 i} - \frac{\tan g^2 i}{EI_z} - \frac{1}{\mu I_z} \right) \cos \theta. \end{aligned}$$



Si nous posons

$$A = \frac{PR^2}{\cos i} \left( \frac{1}{\mu I_z} + \frac{\tan^2 i}{EI_z} \right),$$

$$B = \frac{PR^2}{\cos i} \left( \frac{1}{EI_y \cos^2 i} - \frac{\tan^2 i}{EI_z} - \frac{1}{\mu I_z} \right) \cos \vartheta,$$

les trois premières des formules (5) donnent

$$\frac{d\delta a''}{d\vartheta} = \frac{d\delta a}{d\vartheta} \operatorname{tang} i - \left( A \cos \vartheta - \frac{B}{2} \cos 2\vartheta + \frac{B}{2} \right) \cos i,$$

$$\frac{d\delta b''}{d\vartheta} = \frac{d\delta b}{d\vartheta} \operatorname{tang} i - \left( A \sin \vartheta + \frac{B}{2} \sin 2\vartheta \right) \cos i,$$

$$\frac{d\delta c''}{d\vartheta} = \frac{d\delta c}{d\vartheta} \operatorname{tang} i.$$

On déduit de là, en remarquant que, en raison de l'accroissement, les variations sont nulles pour  $\vartheta = 0$ ,

$$(15) \quad \begin{cases} \delta a'' = \delta a \operatorname{tang} i - \left( A \sin \vartheta - \frac{B}{4} \sin 2\vartheta + \frac{B}{4} \vartheta \right) \cos i, \\ \delta b'' = \delta b \operatorname{tang} i + \left( A \cos \vartheta + \frac{B}{4} \cos 2\vartheta - A - \frac{B}{4} \right) \cos i, \\ \delta c'' = \delta c \operatorname{tang} i. \end{cases}$$

Posons encore  $C = \frac{P}{EI_z} \cos^3 i \sin i$ .

La quatrième des équations (5') et les équations (6') deviennent

$$(16) \quad \begin{cases} \cos \vartheta \frac{d\delta a}{d\vartheta} + \sin \vartheta \frac{d\delta b}{d\vartheta} = + C(1 - \cos \vartheta), \\ - \sin \vartheta \delta a + \cos \vartheta \delta b + \sin i \delta c = 0, \\ \sin i \sin \vartheta \delta a'' - \sin i \cos \vartheta \delta b'' + \cos i \delta c'' = 0. \end{cases}$$

En remplaçant dans la dernière de ces équations  $\delta c''$  par sa valeur déduite de la troisième des équations (15), elle devient

$$(17) \quad \delta c = - \sin \vartheta \delta a'' + \cos \vartheta \delta b'',$$

et, en portant cette valeur dans la seconde,

$$(\partial a + \sin i \partial a'') \sin \vartheta - (\partial b + \sin i \partial b'') \cos \vartheta = 0.$$

Si l'on remplace dans cette formule  $\partial a''$  et  $\partial b''$  par leurs valeurs (15), on trouve

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \vartheta \partial a - \cos \vartheta \partial b \\ - \left[ A + \frac{B}{4} \cos 3\vartheta + \frac{B}{2} \vartheta \sin \vartheta - \left( A + \frac{B}{4} \right) \cos \vartheta \right] \sin i \cos^2 i = 0. \end{array} \right.$$

Posons, pour simplifier,

$$f(\vartheta) = \left[ A + \frac{B}{4} \cos 3\vartheta + \frac{B}{2} \vartheta \sin \vartheta - \left( A + \frac{B}{4} \right) \cos \vartheta \right] \sin i \cos^2 i;$$

nous aurons

$$(19) \quad \sin \vartheta \partial a - \cos \vartheta \partial b - f(\vartheta) = 0,$$

et, en différentiant,

$$\cos \vartheta \partial a + \sin \vartheta \partial b + \sin \vartheta \frac{d\partial a}{d\vartheta} - \cos \vartheta \frac{d\partial b}{d\vartheta} - f'(\vartheta) = 0.$$

De cette équation et de la première des équations (16) on tire

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\partial a}{d\vartheta} + \sin \vartheta \cos \vartheta \partial a + \sin^2 \vartheta \partial b - f'(\vartheta) \sin \vartheta = C(1 - \cos \vartheta) \cos \theta, \\ \frac{d\partial b}{d\vartheta} - \cos^2 \vartheta \partial a - \sin \vartheta \cos \vartheta \partial b + f'(\vartheta) \cos \vartheta = C(1 - \cos \vartheta) \sin \theta. \end{array} \right.$$

Les équations (19) et (20) permettent de séparer  $\partial a$  et  $\partial b$ , et donnent

$$\begin{aligned} \frac{d\partial a}{d\vartheta} + \partial a \operatorname{tang} \vartheta - f(\vartheta) \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} - f'(\vartheta) \sin \vartheta - C(1 - \cos \vartheta) \cos \theta &= 0, \\ \frac{d\partial b}{d\vartheta} - \partial b \cot \alpha - f(\vartheta) \frac{\cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta} + f'(\vartheta) \cos \vartheta - C(1 - \cos \vartheta) \sin \theta &= 0; \end{aligned}$$

d'où

$$(21) \quad \begin{cases} \partial a = \cos \vartheta \int_0^{\theta} [f(\vartheta) \tan^2 \vartheta + f'(\vartheta) \tan \vartheta + C(1 - \cos \vartheta)] d\vartheta, \\ \partial b = \sin \vartheta \int_0^{\theta} [f(\vartheta) \cot^2 \vartheta - f'(\vartheta) \cot \vartheta + C(1 - \cos \vartheta)] d\vartheta. \end{cases}$$

En effectuant les intégrations, on trouve

$$(22) \quad \begin{cases} \partial a = \frac{1}{2} \sin 2i \cos i \left[ \Lambda (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta) - \frac{B}{4} \sin 2\vartheta \right. \\ \quad \left. + \frac{B}{12} (\sin 4\vartheta - \sin 2\vartheta) + \frac{B\theta^2}{2L} \right] \\ \quad + c(\vartheta - \sin \vartheta) \cos \vartheta, \\ \partial b = \frac{1}{2} \sin 2i \cos i \left[ -\Lambda (\vartheta \sin \vartheta + \cos \vartheta) - \frac{B}{4} (1 - \cos 2\vartheta) \right. \\ \quad \left. + \frac{B}{12} (\cos 2\vartheta - \cos 4\vartheta) + \Lambda \right] \\ \quad + c(\vartheta - \sin \vartheta) \sin \vartheta. \end{cases}$$

En portant ces valeurs dans la seconde des équations (16), on trouve

$$\partial c = \cos^2 i \left[ \Lambda (1 - \cos \vartheta) + \frac{B}{12} (\cos 5\vartheta - \cos 3\vartheta) \right].$$

On déduit de là

$$\partial z = R \cos i \left[ \Lambda (\vartheta - \sin \vartheta) + \frac{B}{12} \left( \frac{1}{5} \sin 5\vartheta - \frac{1}{3} \sin 3\vartheta \right) \right].$$

Soit  $\lambda$  l'allongement du ressort ou la valeur de  $\partial x$  pour  $\vartheta = 2n\pi$ , on a

$$\lambda = R \cos i 2n\pi \Lambda,$$

ou, en remplaçant  $\Lambda$  par son expression (14),

$$\lambda = PR^3 \left( \frac{1}{\mu l_i} + \frac{\tan^2 i}{EI_i} \right) 2n\pi,$$

formule dont on peut déduire des conséquences intéressantes quand la section du ressort est circulaire ou carrée.

Des formules (22) on déduit aussi

$$\begin{aligned} \delta x = \frac{R}{2} \sin 2i & \left[ -A(2 \cos \vartheta + \vartheta \sin \vartheta) + \frac{B}{8} \cos 2\vartheta \right. \\ & \left. - \frac{B}{24} \left( \frac{1}{2} \cos 4\vartheta - \cos 2\vartheta \right) + \frac{B\theta^2}{4} + 2A - \frac{7}{48} B \right] \\ & + \frac{CR}{\cos i} \left( \vartheta \sin \vartheta + \cos \vartheta + \frac{1}{4} \cos 2\vartheta - \frac{5}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta y = \frac{R}{2} \sin 2i & \left[ -A\vartheta \cos \vartheta + \left( A - \frac{B}{4} \right) \vartheta + \frac{B}{8} \sin 2\vartheta + \frac{24}{B} \left( \sin 2\vartheta - \frac{\sin 4\vartheta}{2} \right) \right] \\ & + \frac{CR}{\cos i} \left( -\vartheta \cos \vartheta + \sin \vartheta - \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\vartheta \right), \end{aligned}$$

pour les variations qui caractérisent la déformation transversale.

---

*Extrait d'une Lettre à M. Resal;*

PAR M. BRETON (DE CHAMP),

Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées en retraite.

---

Dans une de nos conversations, vous avez bien voulu m'avertir, avec votre obligeance ordinaire, que diverses personnes se livraient à des attaques contre moi au sujet d'un article que j'ai publié autrefois dans ce *Journal*, et dont voici le titre : *Mémoire sur les forces centrifuges développées dans les corps qui roulent.*

Si j'ai bien compris, il paraîtrait qu'on me reproche d'avoir présenté dans cet article, comme des vérités mathématiques rigoureusement démontrées, certains résultats qui sont en opposition manifeste avec ce qu'on enseigne journellement dans les cours de Mécanique.

Permettez moi de vous dire que, si je n'avais pas été aussi complètement assuré que je le suis de vos sentiments de bonne amitié, j'aurais refusé d'ajouter foi à une telle assertion.

J'ai supposé tout d'abord qu'il devait y avoir là quelque malentendu; vous allez voir que je ne me trompais pas.

L'article dont il s'agit fait partie du volume de ce *Journal* pour l'année 1840. Vous y remarquerez, page 145, dans l'alinéa final, ce passage :

« Nous ne devons point dissimuler combien les conclusions de nos formules nous inspirent peu de confiance dans leur exactitude par leur singularité. En les publiant, nous comptons que des esprits auxquels la Mécanique sera plus familière donneront l'explication de ce qu'il y a de paradoxal dans cet écrit. »

Ainsi donc, loin de présenter comme des vérités mathématiques rigoureusement démontrées les conclusions qui semblent découler des

formules auxquelles j'ai été conduit, je signale moi-même ces conclusions comme devant reposer sur quelque paradoxe.

Du reste, la même pensée se révèle avec évidence dans d'autres passages qu'il vous sera bien facile de retrouver.

Vous le voyez, cette conclusion dont vous vous êtes ému et préoccupé par intérêt pour moi, repose sur une méprise.

Ce fut Delaunay qui montra où était le paradoxe; mais il crut n'avoir pas besoin de faire observer que j'en avais moi-même annoncé l'existence (volume cité, p. 189). Cet oubli est peut-être pour quelque chose dans l'accusation portée aujourd'hui contre moi.

*Applications mécaniques du Calcul des quaternions;*

PAR M. LAISANT,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

## PRÉLIMINAIRES.

Le Calcul des quaternions n'est pas une méthode nouvelle. Il y a plus de vingt ans que furent publiées à Dublin, en 1853, les *Lectures on quaternions*, du géomètre anglais Hamilton, auquel la Science est redevable de cette remarquable méthode. Depuis, en Angleterre et ailleurs, les savants ne dédaignèrent pas de s'occuper de ce nouveau calcul; parmi les travaux qui s'y rapportent, il y a lieu surtout de citer le Mémoire italien de M. Bellavitis, inséré en 1858 dans les *Mémoires de la Société italienne des Sciences de Modène*.

M. Bellavitis considère le Calcul des quaternions comme une sorte d'extension de sa méthode des équipollences, si féconde en ce qui touche la Géométrie plane, méthode que j'ai essayé de faire connaître en France par la traduction d'une des œuvres de ce géomètre [\*] et sur laquelle je n'ai pas à revenir ici. Mais, tandis que les règles du calcul algébrique ordinaire s'appliquent exactement aux équipollences (ou équations géométriques) du plan, il n'en est plus de même pour les équations géométriques de l'espace, que l'on considère dans la méthode des quaternions. Malgré cela, M. Bellavitis, en se plaçant à ce point de

[\*] *Exposition de la méthode des équipollences*. Paris, Gauthier-Villars, 1874.

vue, en rattachant les deux méthodes l'une à l'autre, sut mettre dans son exposition une extrême clarté, parvint à résumer dans un Mémoire assez peu volumineux les principes essentiels du Calcul des quaternions et y introduisit même un certain nombre d'applications géométriques. De nombreux travaux ultérieurs de M. Bellavitis ont été publiés sur le même sujet.

En 1866, parut à Londres l'ouvrage posthume d'Hamilton : *Elements of quaternions*, livre qui peut être considéré à bon droit comme une véritable encyclopédie mathématique. Depuis, l'un des disciples d'Hamilton, M. Tait, a publié un traité des quaternions : *An elementary treatise on quaternions*, Oxford, 1867, lequel a été réimprimé en 1873 avec quelques changements, ce qui semble accuser, de la part des mathématiciens d'outre-Manche, un intérêt sérieux pour l'étude de ce calcul. Enfin, en 1873 aussi, a été publié un ouvrage élémentaire : *Introduction to quaternions*, de MM. Tait et Kelland, qui contient de nombreuses et intéressantes applications géométriques.

Cependant, cette méthode, dont on s'occupe en Angleterre, en Italie, en Allemagne, comme le montrent en particulier les travaux de Hankel, ne semble pas avoir pénétré profondément en France, jusqu'à présent. Jusqu'en 1874, à notre connaissance, un seul travail a été publié sur les quaternions, en 1862, par M. Allégret, sous le titre d'*Essai sur le Calcul des quaternions*. M. Prouhet en rendait compte dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1863, p. 333) et disait à ce propos :

« Inventer des expressions qui par elles-mêmes n'offrent aucun sens à l'esprit, et chercher ensuite à leur en donner un par ce que l'on appelle une *interprétation géométrique*, n'est-ce pas comme si, après avoir construit une belle phrase, on cherchait quelle pensée on pourrait bien y mettre. »

Cette critique, très-juste en elle-même, n'est pas applicable à la méthode des quaternions, telle qu'elle a été conçue par Hamilton et exposée par M. Bellavitis. Imaginer des symboles nouveaux pour représenter des faits géométriques très-réels, ce n'est pas faire une phrase pour se demander ensuite ce qu'elle pourrait bien signifier : c'est simplifier et perfectionner la langue parlée et la langue écrite,



c'est gagner en concision et en force; c'est par là même ouvrir la porte à des aperçus nouveaux, car on sait combien le langage réagit sur la pensée elle-même, en Mathématiques comme partout.

Cependant le Calcul des quaternions ne semble pas avoir pris faveur en France. Depuis 1862, personne ne s'en occupait plus, lorsque M. Hoüel, en 1874, publia la dernière Partie de sa *Théorie élémentaire des quantités complexes*. Cette Partie, qui forme un volume de près de 300 pages, est exclusivement consacrée aux quaternions; on y trouve résumés les travaux de MM. Hamilton, Tait, Hankel, Bellavitis; c'est en somme un Traité complet sur la matière, dans lequel l'éminent professeur de la Faculté de Bordeaux a introduit les plus heureuses modifications aux notations anglaises. Les applications tiennent aussi une assez grande place; mais la préoccupation de l'auteur a été principalement l'exposé de la méthode, et les applications données par M. Hoüel se bornent au domaine de la Géométrie.

Il m'a paru qu'il pouvait être intéressant de prendre pour sujet d'étude quelques-unes des nombreuses questions de Mécanique rationnelle auxquelles se prête heureusement la méthode d'Hamilton. Beaucoup d'entre elles ont été traitées, par l'inventeur lui-même, dans ses *Elements of quaternions*; d'autres me sont au contraire personnelles, sans qu'il me soit possible d'indiquer d'une manière complète ce qui m'appartient et ce qui est au contraire la propriété d'autrui. En tous cas, je crois pouvoir affirmer au moins que la méthode d'exposition est sur tous les points nouvelle, et que l'introduction des notations françaises de M. Hoüel, auxquelles je me suis constamment attaché, est de nature à ajouter beaucoup de clarté aux développements. Il est permis de croire que cette question des notations est pour quelque chose dans l'abandon où la plupart des géomètres français ont laissé les quaternions.

Dans ce qui va suivre, je ne reviens pas sur les principes de la méthode; j'ai pris pour base l'Ouvrage de M. Hoüel, que je suppose connu, et qui est trop complet pour que je songe à le refaire. D'ailleurs, mon but n'est pas de donner une exposition nouvelle du calcul d'Hamilton, mais bien d'en montrer les usages dans certaines questions de Mécanique. Parmi ces questions, je me suis efforcé surtout de choisir les plus générales, celles par conséquent dont l'importance théorique est la

plus grande, et j'ai divisé mon Mémoire en trois Parties : Cinématique, Statique et Dynamique, suivant l'ordre généralement adopté aujourd'hui dans l'enseignement.

J'ai cru devoir suivre une marche constamment analytique, et n'appuyer aucun raisonnement sur des considérations géométriques, l'un des principaux mérites des quaternions étant précisément de fournir, à l'aide du calcul, des résultats dont l'interprétation concrète est ensuite immédiate.

Je ne voudrais rien exagérer, et je crois qu'il serait inexact de prétendre que le Calcul des quaternions doive détrôner toutes les méthodes précédentes et faire renoncer aux procédés employés jusqu'à présent en Mécanique rationnelle. La méthode d'Hamilton n'est pas d'une application universelle, non plus qu'aucune autre, mais elle me semble présenter dans des cas nombreux de réels avantages : c'en est un déjà de n'avoir à écrire qu'une seule équation au lieu de trois, comme cela a lieu à chaque instant dans les questions de Mécanique ; et ce serait un tort, à mon sens, de se priver de ressources nouvelles, sous prétexte que ces ressources ne sont pas d'un usage constant. Les difficultés du début que l'on peut rencontrer dans l'étude des quaternions ne sont pas en rapport avec les avantages que l'on en retire, une fois en possession de la méthode.

Je ne saurais enfin me dispenser, sans manquer à l'amitié et à la reconnaissance, de payer ici un juste tribut de remerciements à M. Houël, dont les conseils affectueux et l'extrême bienveillance m'ont été d'un grand secours, sans parler de son Ouvrage, par lequel il a rendu un véritable service à tous ceux qui s'occupent de Mathématiques en France.

---

PREMIÈRE PARTIE : CINÉMATIQUE.

*Étude du mouvement d'un point matériel.*

1. Si un vecteur variable  $x$  est donné en fonction de quantités constantes (algébriques ou non), et d'une variable réelle  $t$ , on pourra l'exprimer sous la forme

$$(1) \quad x = f(t).$$

Cette équation représente le lien géométrique de l'extrémité du vecteur  $x$ , c'est-à-dire une certaine courbe de l'espace. Mais, si nous considérons le paramètre variable  $t$  comme représentant le *temps écoulé* à partir d'un certain instant pris pour origine, il est visible que cette équation exprime, en même temps que la *trajectoire* dont nous venons de parler, la manière dont cette trajectoire est parcourue par le point mobile. En effet, à un instant donné quelconque, la position du mobile se trouve complètement déterminée.

L'équation (1) est donc l'équation la plus générale du mouvement d'un point mobile. Sur cette équation, nous pourrons opérer suivant les besoins tous les calculs nécessaires, en nous conformant aux règles de la méthode des quaternions. Nous pourrons aussi la différencier et la soumettre au calcul des dérivées, *la variable  $t$  étant réelle.*

2. La *vitesse* du mobile  $X$  est évidemment fournie par

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = f'(t) \quad .$$

en grandeur et en direction. Nous désignerons aussi cette vitesse par  $x'_t$ .

En changeant de variable, et supposant pour un instant  $x$  exprimé en fonction de la *longueur de l'arc* de la trajectoire, à partir d'une

certaine origine, nous avons encore

$$(3) \quad \mathbf{x}'_t = \mathbf{x}'_s \frac{ds}{dt}.$$

Sous cette forme, la direction et la grandeur de la vitesse sont mises en évidence, car  $\mathbf{x}'_s = \frac{d\mathbf{x}}{ds}$  est évidemment un vecteur unitaire dirigé suivant la tangente à la trajectoire, et  $\mathfrak{C} \mathbf{x}'_t = \frac{ds}{dt}$  exprime la grandeur de la vitesse.

5. Si nous décomposons  $\mathbf{x}$  suivant trois directions non coplanaires quelconques  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ , nous aurons

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + x_3 \mathbf{A}_3;$$

d'où, pour la vitesse,

$$\mathbf{x}' = \frac{dx_1}{dt} \mathbf{A}_1 + \frac{dx_2}{dt} \mathbf{A}_2 + \frac{dx_3}{dt} \mathbf{A}_3.$$

Or

$$\frac{dx_1}{dt} \mathbf{A}_1 = (\mathbf{x}_1 \mathbf{A}_1)'_t, \quad \frac{dx_2}{dt} \mathbf{A}_2 + \frac{dx_3}{dt} \mathbf{A}_3 = (\mathbf{x}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{A}_2)'_t;$$

de là résulte que, si l'on considère le mouvement projeté, soit sur un *axe* quelconque  $\mathbf{A}_1$ , soit sur un *plan* quelconque  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$ , on peut énoncer ce théorème : *La vitesse de la projection du point mobile est égale à la projection de la vitesse du même point.*

4. Si par le point pris pour origine on mène à chaque instant un vecteur  $\mathbf{x}'$  égal à celui qui représente la vitesse, l'extrémité de  $\mathbf{x}'$  décrira une trajectoire, dont la loi de description sera donnée par l'équation

$$(4) \quad \mathbf{x}' = f'(t).$$

Cette courbe représente ainsi la vitesse à chaque instant; elle est d'un usage assez fréquent, et nous l'appellerons, avec Hamilton, l'*hodographe* du mouvement considéré.

On remarquera que l'équation de l'hodographe (en même temps

que de sa loi de description) s'obtient en prenant la dérivée de l'équation du mouvement par rapport au temps.

Il est clair que l'hodographe d'un mouvement uniforme est une courbe sphérique de centre O, et que l'hodographe d'un mouvement dans un plan est une courbe dans le même plan.

5. Puisque l'accélération se définit par la variation de la vitesse, on voit immédiatement que cette accélération, à l'instant  $t$ , est donnée par

$$(5) \quad \mathbf{x}_i'' = \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{f}''(t).$$

Comme on peut écrire aussi  $\mathbf{x}_i'' = (\mathbf{x}_i')'$ , l'accélération est représentée par la vitesse du point correspondant de l'hodographe.

De la définition même de l'accélération il résulte d'ailleurs qu'elle est située dans le plan osculateur de la trajectoire.

Si nous différencions la relation (3) par rapport à  $t$ , il vient

$$(6) \quad \mathbf{x}_i'' = \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{x}_i' + \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{x}_i'' = \frac{dv}{dt} \mathbf{x}_i' + v^2 \mathbf{x}_i''$$

en appelant  $v$  la grandeur de la vitesse.

Mais il est visible que  $\mathbf{x}_i''$  exprime, en grandeur et en direction, l'inverse du rayon de courbure de la trajectoire en X ( $\mathbf{x}_i'$  étant, comme il importe de se le rappeler, un vecteur unitaire). L'accélération se trouve donc décomposée en deux parties : l'*accélération tangentielle*, dirigée suivant la tangente à la trajectoire, et dont la grandeur est  $\frac{dv}{dt}$ ; l'*accélération normale*, dirigée suivant la normale principale, et dont la grandeur est  $\frac{v^2}{r}$ , si l'on appelle  $r$  le rayon de courbure.

6. Il suit immédiatement de là que l'accélération normale est nulle dans tout mouvement rectiligne, et que réciproquement, si l'accélération normale est constamment nulle, le mouvement est rectiligne.

On voit aussi que, dans tout mouvement uniforme, l'accélération tangentielle est nulle; que dans un mouvement circulaire et uniforme l'accélération normale est constante en grandeur.

Le théorème du n° 5, qui s'applique à la projection du mouvement, soit sur un axe fixe, soit sur un plan fixe, est vrai pour les accélérations comme pour les vitesses. On le démontrerait exactement de la même manière que ci-dessus.

7. Lorsqu'on passe d'un point  $x$  à un point  $x + \Delta x$ , infiniment voisin sur la trajectoire, l'accroissement  $\Delta x$  peut s'exprimer au moyen de la série de Taylor, par exemple sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$(7) \quad \Delta x = \frac{dx}{ds} ds + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{ds^2} ds^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3x}{ds^3} ds^3 + \dots,$$

$$(8) \quad \Delta x = \frac{dx}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2x}{dt^2} dt^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3x}{dt^3} dt^3 + \dots$$

Si l'on néglige dans la formule (7) les termes d'ordre supérieur au second, et si l'on remarque que  $\frac{d^2x}{ds^2}$  est perpendiculaire à la tangente, on voit immédiatement que le terme  $\frac{1}{2} \frac{d^2x}{ds^2} ds^2$  représente la distance du point  $x + \Delta x$  à la tangente au point  $x$ . Ce terme peut se mettre sous la forme  $\frac{1}{2} v^2 x_n'' dt^2$ , et par suite la distance en question est égale à la moitié de l'accélération normale multipliée par le carré de l'élément de temps.

La formule (8) nous montre, de son côté, que si l'on porte sur la tangente en  $x$  une longueur égale à  $v dt$ , et si l'on joint l'extrémité de cette longueur avec le point  $x + \Delta x$ , la ligne ainsi obtenue est exprimée, en grandeur et en direction, par la moitié de l'accélération totale multipliée par le carré de l'élément de temps.

Enfin, le premier membre de cette même formule (8) pouvant s'écrire  $x + \Delta x - x$ , il en résulte, en prenant les dérivées par rapport à  $t$ ,

$$(9) \quad \frac{d(x + \Delta x)}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2} dt,$$

c'est-à-dire que la vitesse en un point infiniment voisin du point  $x$ , at-

teint au bout du temps  $dt$ , peut se décomposer en deux parties, savoir : 1° la vitesse en  $x$ ; 2° l'accélération totale en  $x$ , multipliée par  $dt$ .

8. L'origine  $O$  peut être regardée comme le sommet d'un cône ayant la trajectoire pour directrice, et dont chaque vecteur  $x$  est une génératrice. Dans le temps  $dt$ , ce vecteur décrira un élément de la surface de ce cône, représenté par le triangle ayant pour sommet  $O$  et pour côtés  $x$  et  $x + dx$ . Le quotient de l'aire de ce triangle infiniment petit par  $dt$  pourra être appelé *vitesse aréolaire* du point  $x$ , et nous pourrons la représenter, *en grandeur et en direction*, par une longueur mesurée par le même nombre et portée sur la perpendiculaire élevée en  $O$  sur le plan tangent correspondant.

D'après cela, si nous représentons cette vitesse par  $v$ , nous pourrons l'exprimer ainsi

$$(10) \quad v = \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot xx'.$$

Je propose d'appeler la trajectoire du point  $v$  *hodographe aréolaire* du mouvement.

En prenant la dérivée de la relation (10) par rapport au temps, il vient

$$(11) \quad v' = \frac{1}{2} \mathbf{U} \cdot xx''.$$

formule qui nous donne la vitesse sur l'hodographe aréolaire, ou, ce qui revient au même, l'*accélération aréolaire* du mouvement étndié.

Il n'est pas sans intérêt de remarquer qu'en appelant  $X$  le point mobile,  $XV$  la vitesse,  $XJ$  son accélération, le second membre de l'équation (10) exprime l'aire du triangle  $O XV$  et le second membre de l'équation (11) l'aire du triangle  $O XJ$ . Cette seconde aire représente donc la dérivée de la première, en grandeur et en direction, et par conséquent, si nous projetons ces deux triangles sur un plan fixe quelconque, l'aire du second mesurera la dérivée de l'aire du premier. Ainsi :

*Un point étant mobile dans l'espace, soient formés les deux triangles ayant pour sommets : l'un ce point mobile, l'extrémité de sa vitesse et*

*un point fixe quelconque ; l'autre ce point mobile, l'extrémité de son accélération et le même point fixe. Ces deux triangles étant projetés sur un plan fixe quelconque, la projection de l'aire du second mesurera la dérivée de la projection de l'aire du premier par rapport au temps.*

Lorsqu'il s'agit d'un mouvement dans lequel les aires parcourues sont proportionnelles aux temps, la vitesse aréolaire est constante en grandeur, et par conséquent l'hodographe aréolaire est une courbe sphérique de centre O.

S'il s'agit d'un mouvement qui a lieu dans un plan passant par O, l'hodographe aréolaire se réduit à une droite normale à ce plan.

Si les deux circonstances précédentes se produisent simultanément, l'hodographe aréolaire s'évanouit, se réduisant à un point. Dans ce cas, le triangle formé par le vecteur  $x$  et l'accélération doit avoir une aire nulle, c'est-à-dire que l'accélération passe constamment par le point O.

Réciproquement, si ce dernier fait se produit, nous avons, d'après (11) et (10),

$$v'_i = 0, \quad \gamma = c,$$

de sorte que le mouvement se produit, dans un plan (normal à  $c$ ), avec une vitesse aréolaire constante.

La vitesse aréolaire sur l'hodographe aréolaire a pour expression

$$(12) \quad \frac{1}{8} \mathbf{U} (\mathbf{U} \mathbf{x} \mathbf{x}'_i \mathbf{U} \mathbf{x} \mathbf{x}'_i) = - \frac{1}{8} x \mathcal{S} \mathbf{x} \mathbf{x}'_i x'_i.$$

Cela nous montre que cette vitesse est dirigée dans un plan perpendiculaire à  $x$  (ce qui était évident), et en outre que sa grandeur est exprimée par le produit de  $\frac{3}{4} \cdot OX$  par le volume du tétraèdre  $OXYJ$ .

Lorsqu'on étudie un mouvement rectiligne suivant une trajectoire passant par l'origine, la notion de la vitesse aréolaire s'évanouit évidemment.

9. Nous pouvons, après ces considérations générales, chercher à étudier plus particulièrement les circonstances d'un mouvement qui s'accomplit dans un plan. Prenons un point de ce plan comme origine



et déterminons la position du point mobile à chaque instant par ses coordonnées polaires ordinaires, que nous appellerons  $r$  et  $\varrho$ . (Il est essentiel de ne pas confondre  $r$  avec  $r$ , que nous avons employé plus haut pour représenter le rayon de courbure de la trajectoire.)

Le mouvement pourra alors se représenter par l'équation

$$(13) \quad x = r \mathbf{B}\mathbf{A}^\varrho,$$

$\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  étant deux vecteurs unitaires, le premier perpendiculaire au plan du mouvement, et le second dirigé dans ce plan.

Les coordonnées  $r$  et  $\varrho$  doivent être regardées, bien entendu, comme deux fonctions du temps  $t$ ;  $\varrho$  sera considéré comme rapporté à l'angle droit pris pour unité.

En prenant les dérivées de l'équation (13) par rapport au temps, nous avons, comme expression de la vitesse,

$$(14) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{B}\mathbf{A}^\varrho + r \frac{d\varrho}{dt} \mathbf{B}\mathbf{A}^\varrho \mathbf{A}.$$

Cette formule (14) nous montre immédiatement que la vitesse se compose de deux parties : la *vitesse de translation*  $\frac{dr}{dt}$  suivant le rayon vecteur; et la *vitesse de circulation*  $r \frac{d\varrho}{dt}$  perpendiculaire à ce même rayon.

La *vitesse angulaire* est  $\frac{d\varrho}{dt}$ , et la *vitesse aréolaire* se représente par  $\frac{1}{2} r^2 \frac{d\varrho}{dt} \mathbf{A}$ ; cette dernière est de direction constante, comme on l'a vu plus haut.

En prenant encore la dérivée de l'équation (14), nous avons

$$(15) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varrho}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{B}\mathbf{A}^\varrho + \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varrho}{dt} + r \frac{d^2\varrho}{dt^2} \right] \mathbf{B}\mathbf{A}^\varrho \mathbf{A},$$

et nous voyons ainsi que l'accélération totale se décompose en deux parties, l'une dirigée suivant le rayon vecteur, de grandeur  $\frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varrho}{dt} \right)^2$ ,

et l'autre, perpendiculairement, exprimée par  $2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varrho}{dt} + r \frac{d^2\varrho}{dt^2}$ .

Il serait possible également d'étudier un mouvement plan, en rapportant la position du point mobile à deux axes coordonnés dans ce plan. L'équation du mouvement prendrait alors la forme

$$x = x_1 \Lambda_1 + x_2 \Lambda_2,$$

$x_1$  et  $x_2$  étant fonctions du temps.

Si l'on veut, en particulier, étudier le mouvement dont l'accélération est constante et égale à  $A$ , il suffit évidemment d'intégrer l'équation

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = A,$$

ce qui donne

$$\frac{dx}{dt} = At + B,$$

et

$$(16) \quad x = \frac{1}{2} At^2 + Bt + C.$$

$C$  donne la position du mobile à l'origine des temps,  $B$  la vitesse initiale de ce mobile. En supposant l'origine  $O$  prise dans le plan  $(A, B)$ , il est clair que  $A, B, C$  sont coplanaires entre eux, et avec  $x$ . La trajectoire est donc une courbe plane, et il est aisé de reconnaître que c'est une parabole. En choisissant pour origine la position initiale du mobile, l'équation se réduit d'ailleurs à la forme plus simple

$$x = \frac{1}{2} At^2 + Bt,$$

qui nous montre immédiatement que la trajectoire est une parabole dont les diamètres sont dirigés suivant  $A$ , et dont  $B$  est la tangente à l'origine.

En prenant ainsi la position initiale pour origine, la vitesse aréolaire prend la forme simple  $\frac{1}{4} t^2 \mathbf{U}_{BA}$ , ce qui donne une propriété assez intéressante.

Les propriétés diverses de ce mouvement, les problèmes auxquels il donne lieu, pourraient être étudiés d'après l'algorithme des quaternions; mais nous préférons, sur ces questions si connues, nous en tenir à quelques indications générales.

10. Cherchons à former l'équation d'un mouvement dont l'accélération, passant par un point fixe, est proportionnelle à la distance du mobile à ce point fixe. Nous exprimerons cette propriété par l'équation

$$(17) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \pm m^2 x,$$

en prenant pour origine le point fixe. Le signe + du second membre est relatif au cas d'une accélération *répulsive*, et le signe - au cas d'une accélération *attractive*.

En intégrant cette formule, on obtient pour la loi du mouvement

$$(18) \quad x = A \operatorname{Ch} mt + B \operatorname{Sh} mt$$

dans le premier cas, et

$$(19) \quad x = A \cos mt + B \sin mt$$

dans le second, A et B étant deux vecteurs arbitraires, mais constants.

Le mouvement représenté par la relation (18) a pour trajectoire une hyperbole ayant pour centre l'origine, et celui représenté par (19) une ellipse de même centre; A et B, dans les deux cas, sont deux demi-diamètres conjugués.

La vitesse du premier de ces mouvements a pour expression

$$(20) \quad \frac{dx}{dt} = m(\lambda \operatorname{Sh} mt + \nu \operatorname{Ch} mt)$$

et celle du second

$$(21) \quad \frac{dx}{dt} = m(-\lambda \sin mt + \nu \cos mt).$$

Nous voyons ainsi qu'à un facteur constant près cette vitesse s'exprime par le demi-diamètre conjugué de celui qui aboutit au point mobile; si bien que l'hodographe est, pour le premier mouvement, une hyperbole homothétique de la conjuguée de celle qui parcourt

le mobile; et, pour le second, une ellipse homothétique à la trajectoire.

Ces équations (18) et (19) permettraient d'étudier les propriétés de l'hyperbole et de l'ellipse; mais, ayant actuellement pour objet une étude cinématique et non pas purement géométrique, nous n'entamerons pas une semblable digression.

**II.** Nous allons maintenant étudier un cas beaucoup plus intéressant au point de vue des applications physiques, puisque c'est celui des mouvements planétaires : nous voulons parler de l'hypothèse d'une accélération *centrale* (appelant ainsi généralement celle qui passe constamment par un point ou centre fixe) dont la grandeur est inversement proportionnelle au carré de la distance du centre au point mobile.

Il est clair, tout d'abord, d'après ce qu'on a vu au n<sup>o</sup> 8, que le mouvement s'exécute dans un plan, et que la vitesse aréolaire est constante. Maintenant,  $m$  représentant un facteur constant, nous avons

$$(22) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m \mu x}{(\varrho x)^2};$$

$m$  est négatif dans le cas d'une accélération attractive, et positif pour une accélération répulsive.

C'est cette équation (22) qu'il s'agit d'intégrer : la remarquable méthode d'intégration qui suit est celle qu'a employée Hamilton.

On sait que, généralement,  $\frac{d\mu x}{\mu x} = \mathfrak{U} \frac{dx}{x}$ . Donc, divisant par  $dt$ , et introduisant sous le signe  $\mathfrak{U}$  le facteur  $\frac{1}{x}$ ,

$$(23) \quad \frac{d\mu x}{dt} = - \frac{\mu x \cdot \mathfrak{U} x x'}{(\varrho x)^2} = - \frac{\mu x \cdot c}{(\varrho x)^2},$$

puisque la vitesse aréolaire  $\frac{1}{2} \mathfrak{U} x x'$  est constante.

Par conséquent,

$$(24) \quad \frac{d^2x}{dt^2} c = - m \frac{d\mu x}{dt},$$

et de là

$$(25) \quad x'_t \cdot c = E - m \cdot \mathbf{U}x.$$

Il est seulement à remarquer que le vecteur  $E$ , que nous introduisons ici comme constante d'intégration, n'est pas absolument arbitraire. Ce vecteur est assujéti à être perpendiculaire à  $c$ , c'est-à-dire dirigé dans le plan du mouvement, puisque  $\mathfrak{S}x'_t \cdot c^2$  et  $\mathfrak{S}(\mathbf{U}x \cdot c)$  sont tous deux nuls, ce qui donne  $\mathfrak{S} \cdot E \cdot c = 0$ .

Opérant sur (25) par  $\times \frac{1}{c}$ , nous obtenons l'hodographe

$$(26) \quad x'_t = E c^{-1} - m \cdot (\mathbf{U}x) c^{-1}.$$

Les deux termes du second membre sont des expressions vectorielles : le premier est constant, et le second a un module constant, et ne varie qu'en direction seulement. Il suit de là que l'hodographe est une circonférence, de même plan que la trajectoire, ayant pour centre l'extrémité du vecteur  $E c^{-1}$ , et pour rayon  $\frac{m}{c}$ .

On peut encore déterminer l'hodographe par les deux équations suivantes, écrites simultanément :

$$(27) \quad \begin{cases} \mathfrak{C}(x'_t - E c^{-1}) = \frac{m}{c}, \\ \mathfrak{S} \cdot c x'_t = 0. \end{cases}$$

La première représente une sphère, et la seconde un plan passant par l'origine, et aussi par le centre de la sphère.

Pour avoir l'équation de la trajectoire, il suffit d'opérer par  $\mathbf{U} \cdot x$  sur celle de l'hodographe (26), ce qui donne

$$(28) \quad c = \mathbf{U} \cdot x E c^{-1} + m \mathfrak{C}x \cdot c^{-1},$$

ou, en opérant par  $\mathfrak{S}(\cdot)c$ ,

$$(29) \quad c^2 = \mathfrak{S} \cdot E x + m \mathfrak{C}x,$$

ou enfin

$$(30) \quad m \cdot \mathfrak{C}x = \mathfrak{S} \cdot E (c^2 E^{-1} - x).$$

Sous cette dernière forme, nous reconnaissons immédiatement la propriété du foyer et de la directrice. C'est en effet l'équation d'une surface de révolution du second ordre, ayant pour axe  $\varepsilon$ .

La trajectoire est donnée par l'intersection de cette surface avec le plan

$$(31) \quad \mathfrak{S}. \text{cx} = 0,$$

c'est-à-dire par l'ensemble des équations (30) et (31).

On reconnaît sans peine que l'origine est un foyer; que la distance du foyer à la directrice est exprimée en grandeur et en direction par  $c^2\varepsilon^{-1}$ ; que l'excentricité est  $\frac{\mathfrak{C}\varepsilon}{m}$ , et l'axe focal  $-\frac{2m\varepsilon^2}{m^2 + \varepsilon^2}$ .

L'équation (26) peut encore se mettre sous la forme

$$(32) \quad (x' - \varepsilon c^{-1})^2 = + m^2 \cdot c^{-2} = + \frac{m^2}{c^2};$$

d'où résultent immédiatement la forme circulaire de l'hodographe et la détermination de son centre et de son rayon.

Il est à remarquer, si nous nous rappelons l'expression de  $c$ , écrite plus haut, que le rayon a pour valeur le quotient de la constante  $m$  par la double vitesse aréolaire.

Suivant que  $\mathfrak{C}\varepsilon \leq m$ , l'origine  $O$  est intérieure ou extérieure au cercle hodographique; si  $\mathfrak{C}\varepsilon = m$ , l'origine est alors sur la circonférence de ce cercle.

**12.** Cette propriété fort remarquable des mouvements planétaires, qu'Hamilton désigne sous le nom de *loi de l'hodographe circulaire*, l'a conduit à de nombreuses conséquences, que nous ne saurions reproduire ici, même en partie, au moins pour le moment. Mais, avant de quitter cette étude de la Cinématique d'un point, il ne sera peut-être pas sans intérêt de voir comment l'illustre inventeur des quaternions a étendu l'analyse du numéro précédent au cas d'une accélération centrale quelconque.

Soit  $R$  (au lieu de  $m\varepsilon^{-2}$ ) la grandeur de l'accélération attractive, répandant à la distance  $r$  du mobile au centre fixe.

Alors

$$(33) \quad x'_t = -R \mathbf{U}x = Rrx^{-1},$$

si nous remarquons que  $r = \mathbf{C}x$ .

Prenant les dérivées, en ayant égard à la formule

$$\frac{d\mathbf{U}x}{\mathbf{U}x} = \mathbf{U} \frac{dx}{x},$$

que nous avons rappelée plus haut, il vient

$$\begin{aligned} x''_t &= -R'_t \cdot \mathbf{U}x - \frac{R}{r^2} \frac{\mathbf{U}(xx'_t)}{\mathbf{U}x} \\ &= -R'_t \mathbf{U}x + \frac{R}{r^2} \mathbf{U}x \cdot \mathbf{U}(xx'_t), \end{aligned}$$

ou, posant la double vitesse aréolaire  $\mathbf{U} \cdot xx'_t$  égale à  $c$ , comme plus haut,

$$(34) \quad x''_t = -R'_t \mathbf{U}x + \frac{R}{r^2} \mathbf{U}x \cdot c.$$

Opérant par  $\mathbf{U} \cdot \frac{1}{x'_t}$ , en tenant compte de la formule (33), on a

$$(35) \quad \mathbf{U} \frac{x''_t}{x'_t} = -\frac{1}{r^2} c.$$

Mais, ainsi que nous l'avons remarqué au n° 5, l'inverse du rayon de courbure d'une courbe quelconque  $x$ , dirigé suivant la normale, a pour expression le vecteur  $x''_s$ , appelé par Hamilton *vecteur de courbure*. Et, en se rappelant que  $x'_s = \mathbf{U}x'_t$ , on peut transformer  $x''_s$  de la manière suivante :

$$x''_s = -\frac{1}{x'_t} \mathbf{U} \frac{x''_t}{x'_t}.$$

Le *vecteur de courbure de l'hodographe* a donc pour expression  $-\frac{1}{x'_t} \mathbf{U} \frac{x''_t}{x'_t}$ , ou, si nous remplaçons  $x'_t$  et  $\mathbf{U} \frac{x''_t}{x'_t}$  par leurs valeurs (33) et (35), et si nous appelons  $c$  la grandeur  $\mathbf{C}c$  de la double vitesse

aréolaire,

$$(36) \quad \frac{c}{Rr^2} \mathfrak{H} \text{ xc.}$$

Quant au rayon de courbure  $h$  de l'hodographe, il a pour valeur l'inverse du module de l'expression (36), ou

$$(37) \quad h = \frac{Rr^2}{c}.$$

En langage ordinaire, cette formule (37) peut se traduire par l'énoncé suivant :

*Dans tout mouvement dont l'accélération passe par un centre fixe, le rayon de courbure de l'hodographe a pour valeur le produit de l'accélération par le carré de la distance, divisé par le double de la vitesse aréolaire.*

Ce théorème nous donne, comme cas particulier, la loi de l'hodographe circulaire pour le cas de l'attraction universelle, examiné dans le numéro précédent. Il nous fournit en même temps la démonstration de la réciproque de cette loi, c'est-à-dire que :

*Pour tout mouvement d'accélération centrale, si l'hodographe du mouvement est un cercle, l'accélération est nécessairement en raison inverse du carré de la distance du centre fixe au point mobile.*

La formule (37) peut encore se transformer, en introduisant la longueur  $p$  de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente à l'hodographe. On a, en effet,  $p = \frac{c}{r}$ , comme il est facile de le reconnaître directement, et par suite

$$(38) \quad h = \frac{Rr}{p},$$

$$(39) \quad h = \frac{Rc}{p^2}.$$

Cette dernière relation (39) ne contient que des éléments relatifs à l'hodographe, puisque  $R$  n'est autre chose que la vitesse sur cette courbe.

Elle nous fournit donc la condition pour qu'un mouvement donné



soit le mouvement hodographique correspondant à un mouvement d'accélération centrale. Il faut, en outre, évidemment que le mouvement donné s'exécute dans un plan unique.

On peut aussi retrouver ces conditions en cherchant à résoudre directement le problème. Soit, en effet,  $z$  le mouvement donné. Le mouvement  $x$  dont  $z$  est l'hodographe s'exprimera par  $x = \int z dt$ ; de sorte que les conditions cherchées s'exprimeront elles-mêmes par l'équation

$$(40) \quad \mathbf{V} . (\int z dt . z) = c,$$

$c$  étant un vecteur constant.

Cette équation peut en fournir d'autres, d'une interprétation plus facile. Ainsi, en en prenant deux fois successivement la dérivée, nous avons

$$(41) \quad \mathbf{V} . (\int z dt . z'_i) = 0,$$

$$(42) \quad \mathbf{V} . (\int z dt . z''_i) + \mathbf{V} . z z'_i = 0.$$

De la formule (41) on tire

$$\int z dt = u z'_i,$$

et par suite, en vertu de (40),

$$(43) \quad u \mathbf{V} . z'_i z = c,$$

ce qui démontre que la courbe donnée *doit être plane*. De plus,

$$(44) \quad u \mathbf{V} . z'_i z'_i + \mathbf{V} . z z'_i = 0,$$

et, en éliminant  $u$  entre (43) et (44),

$$(45) \quad c . \mathbf{V} z'_i z'_i = (\mathbf{V} . z z'_i)^2,$$

d'où l'on déduit immédiatement la relation (39).

*Mouvement d'un solide autour d'un point fixe.*

**13.** On sait que la rotation d'une figure autour d'un axe fixe  $L$ , l'amplitude de la rotation étant  $2\lambda$ , se représente dans le Calcul des quaternions par l'opérateur  $L^{-\lambda} ( \ ) L^\lambda$ , ou, si nous appelons  $L$  le quaternion  $L^\lambda$ , par  $L^{-1} ( \ ) L$ .

Nous ne nous arrêterons pas à démontrer cette proposition, ni à montrer comment elle permet d'opérer très-simplement des compositions de rotations entre elles ou avec des translations. Nous allons seulement en déduire quelques conséquences, utiles pour la suite de notre étude.

Considérons un vecteur  $\Lambda$ , qui subit la rotation que nous venons de définir, ce qui le transforme en  $\Lambda_1$ . Nous aurons

$$(46) \quad L^{-1} \Lambda L = \Lambda_1,$$

et nous pouvons aussi mettre cette formule sous la forme

$$(47) \quad \Lambda L = L \Lambda_1.$$

Si nous décomposons le quaternion  $L$  (que nous pouvons supposer unitaire) en ses parties réelle et symbolique  $L_0$  et  $L_i$ , la formule (46) nous donnera

$$(48) \quad L_0^2 \Lambda - L_i \Lambda L_i + 2 L_0 \mathfrak{V} \cdot \Lambda L_i = \Lambda_1.$$

De même, la formule (47) nous donne

$$L_0 (\Lambda - \Lambda_1) = L_i \Lambda_1 - \Lambda L_i,$$

d'où, en prenant les parties vectorielles de chaque terme,

$$(49) \quad L_0 (\Lambda - \Lambda_1) = \mathfrak{V} \cdot L_i (\Lambda + \Lambda_1).$$

**14.** Comme première application, cherchons à démontrer le célèbre théorème, énoncé par d'Alembert, en ce qui concerne un mouvement

infinitement petit, et consistant en ce que *tout déplacement d'un solide dont un point est immobile équivaut à une rotation autour d'un certain axe.*

Prenez le point fixe pour origine, et soient A, B deux points du corps qui deviennent respectivement A<sub>1</sub> et B<sub>1</sub>. Je dis qu'on peut écrire

$$(50) \quad L^{-1} A L = A_1, \quad L^{-1} B L = B_1,$$

et il est évident que, si l'on peut trouver un quaternion L satisfaisant à ces deux équations, le théorème est démontré.

Or la formule (49), qui se déduit de la première équation (50), en entraîne une pareille en B. Si nous les multiplions, et si nous prenons ensuite les parties vectorielles, nous aurons

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} L_0^2 \mathbf{U} \cdot (A - A_1) B - B_1 &= \mathbf{U} \cdot [\mathbf{U} \cdot L_i (A + A_1) \mathbf{U} \cdot L_i (B + B_1)] \\ &= (B + B_1) \mathfrak{S} \cdot L_i (A + A_1) L_i \\ &\quad - L_i \mathfrak{S} \cdot L_i (A + A_1) (B + B_1) \\ &= L_i \mathfrak{S} \cdot (A + A_1) L_i' (B + B_1). \end{aligned} \right.$$

Par suite, nous obtiendrons la *direction* du vecteur L<sub>i</sub>, c'est-à-dire de l'axe de rotation, en formant l'expression  $\mathbf{U} \cdot (A - A_1) B - B_1$ .

Cette direction étant obtenue, tout est démontré en réalité; mais nous pouvons nous proposer de rechercher en outre l'*amplitude* de la rotation, que la formule nous donnera immédiatement, si nous remarquons que L<sub>0</sub> = cos λ, L<sub>i</sub> = i sin λ, d'où

$$(52) \quad \tan^2 \lambda = \frac{\mathfrak{U} \cdot \mathbf{U} \cdot (A - A_1) (B - B_1)}{\mathfrak{S} \cdot (A + A_1) L (B + B_1)}.$$

Cette expression s'interprète géométriquement avec la plus grande facilité.

Il est bon de remarquer que la démonstration qui précède suppose implicitement que le corps n'a subi aucune déformation. Il est clair, en effet, que c'est là une condition indispensable pour que les équations (50) soient satisfaites.

### 15. Soit maintenant un corps solide, mobile d'une manière continue

autour d'un point fixe, que nous prendrons pour origine. Le mouvement élémentaire de ce corps, à un instant quelconque, sera, d'après ce qui précède, une rotation infiniment petite autour d'un axe (axe instantané de rotation) passant par l'origine.

Désignons par  $x$  le vecteur d'un point déterminé du corps à l'instant considéré; par  $\tau$  le vecteur unitaire suivant l'axe instantané (et dirigé dans un sens tel que la rotation élémentaire s'accomplisse dans le sens direct par rapport à cet axe); par  $d\theta$  l'amplitude de la rotation élémentaire. Nous aurons, pour passer au point infiniment voisin  $x + dx$ ,

$$x + dx = \tau^{-\frac{d\theta}{2}} x \tau^{+\frac{d\theta}{2}}$$

ou, négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs au premier,

$$x + dx = \left(1 - \tau \frac{d\theta}{2}\right) x \left(1 + \tau \frac{d\theta}{2}\right) = x + \frac{d\theta}{2} (x\tau - \tau x),$$

et enfin

$$(53) \quad dx = d\theta \cdot \mathfrak{U} \cdot x\tau.$$

Appelant  $\omega$  la vitesse angulaire  $\frac{d\theta}{dt}$ , et désignant par un accent les dérivées prises par rapport au temps, seule variable indépendante que nous considérons ici, nous tirons de là pour la vitesse du point  $x$

$$(54) \quad x' = \omega \mathfrak{U} \cdot x\tau = \omega x \sin(\widehat{x\tau}) \mathfrak{U} \cdot x\tau,$$

$x$  étant la longueur du vecteur  $OX = x$ .

Ainsi, cette vitesse du point  $X$  a pour grandeur le produit de la vitesse angulaire par la distance du point  $X$  à l'axe instantané de rotation; elle est perpendiculaire au plan passant par  $OX$  et l'axe instantané, et son sens est évidemment celui du mouvement, c'est-à-dire que, pour un observateur placé sur l'axe  $OT$ , les pieds en  $O$ , elle se dirige à gauche du plan  $TOX$ .

Actuellement, considérons le déplacement *total* subi par le corps, à partir d'une certaine position initiale. Ce déplacement équivaut à une rotation finie  $L^{-1} ( \quad ) L$ , en appelant  $L$  un certain quaternion que

nous supposons unitaire; de sorte que, si  $\mathbf{a}$  est la position initiale du vecteur  $\mathbf{x}$ , nous aurons

$$(55) \quad \mathbf{x} = L^{-1} \mathbf{a} L.$$

De là, en prenant les dérivées,

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathbf{x}' &= (L^{-1})' \mathbf{a} L + L^{-1} \mathbf{a} L' = -L^{-1} L' L^{-1} \mathbf{a} L + L^{-1} \mathbf{a} L L^{-1} L' \\ &= 2\mathfrak{A} \cdot (L^{-1} \mathbf{a} L \mathfrak{A} L^{-1} L') = 2\mathfrak{A} \cdot (\mathbf{x} \mathfrak{A} L^{-1} L'). \end{aligned} \right.$$

Or,

$$\mathfrak{A} \cdot L^{-1} L' = \frac{\mathfrak{A} L L'}{L L} = \frac{L'}{L} = L^{-1} L',$$

puisque nous avons supposé que  $L$  est un quaternion unitaire. Nous pouvons donc écrire encore

$$(57) \quad \mathbf{x}' = 2\mathfrak{A} \cdot (\mathbf{x} L^{-1} L') = 2\mathfrak{A} \cdot (L^{-1} \mathbf{a} L').$$

Ces nouvelles expressions de la vitesse seront utiles chaque fois que l'on connaîtra le déplacement total du corps, en fonction du temps, mais que le mouvement élémentaire ne sera pas directement donné.

De la formule (55) on déduit aussi

$$(58) \quad \mathbf{v} = L \mathbf{x} L^{-1},$$

et, en prenant les dérivées,

$$(59) \quad \mathbf{v}' = L \mathbf{x}' L^{-1} + L' \mathbf{x} L^{-1} + L \mathbf{x} (L^{-1})'.$$

La formule (58) exprime le déplacement total du corps, considéré comme partant de la position au temps  $t$  pour revenir à la position initiale; or, si l'on veut, le mouvement apparent d'un corps en repos absolu, rapporté au corps mobile; par suite, la formule (59) s'interprète d'elle-même, et nous fournit ce théorème bien connu:

*Si  $M$  est un corps en repos, et  $N$  un corps mobile autour d'un point fixe, la vitesse apparente d'un point considéré comme lié au corps  $M$ , pour un observateur emporté par  $N$ , est égale et directe-*

ment opposée à la vitesse réelle du même point considéré comme lié à  $(N)$ .

16. On peut chercher à déterminer l'axe instantané, connaissant seulement le déplacement total en fonction du temps; c'est ce que permettra de faire la comparaison des formules (56) et (57) avec (54). Nous avons effectivement ainsi

$$\omega \mathbf{V}_{xT} = {}_2\mathbf{V} \cdot (x\mathbf{V} \cdot L^{-1}L') = {}_2\mathbf{V} \cdot (xL^{-1}L'),$$

et, comme cette relation doit subsister, quel que soit  $x$ , c'est-à-dire pour tous les points du corps,

$$(60) \quad {}_T\omega = {}_2L^{-1}L' = z.$$

Ce vecteur  $z$  dirigé suivant l'axe instantané, et d'une longueur proportionnelle à la vitesse angulaire à chaque instant, peut nous fournir un moyen de représenter le mouvement du corps, si nous le construisons dans toutes les positions successives. Nous pourrions appeler la courbe  $(z)$  parcourue de cette manière l'*hodographe* du mouvement. Elle présente une grande analogie avec l'hodographe aréolaire dont nous avons précédemment proposé l'emploi dans l'étude du mouvement d'un point.

En prenant la dérivée de la formule (60), on trouve pour la vitesse sur l'hodographe

$$(61) \quad z' = {}_2[L^{-1}L'' - (L^{-1}L')^2] = {}_2L^{-1}L'' - \frac{z^2}{2}.$$

On a aussi, en vertu de la formule (54),

$$x' = \mathbf{V}_{xz} = \frac{1}{2}(xz - zx),$$

et par dérivation

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} x'' &= \mathbf{V} \cdot (xz' + x'z) = \mathbf{V} \cdot xz' + z^2x - z\mathfrak{S}xz \\ &= \mathbf{V} \cdot xz' - \omega^2x - z\mathfrak{S}xz, \end{aligned} \right.$$

ce qui fournit une construction très-simple pour l'accélération, con-

struction indépendante, comme l'on voit, de la vitesse même du point mobile.

Cette accélération peut encore se mettre en fonction de  $L$ , sous la forme

$$(63) \quad x'' = 2(\mathfrak{U} \times L^{-1} L'' - L^{-1} L' \times L^{-1} L').$$

§ 7. La formule (60) nous donne pour équation de l'axe instantané, en désignant maintenant par  $z$  le vecteur d'un point *quelconque* de cet axe, et par  $u$  un coefficient réel arbitraire,

$$(64) \quad z = u L^{-1} L',$$

et par suite, en donnant à  $L$  dans cette dernière formule toutes les valeurs successives que ce quaternion peut recevoir, c'est-à-dire en faisant varier  $L$  avec le temps, l'équation (64) est celle de la surface conique, lieu des positions successives *dans l'espace* de tous les axes instantanés.

Si, au contraire, nous ramenons chaque vecteur  $z$  à la position initiale du corps, il deviendra  $LzL^{-1} = \gamma$ ; et par conséquent

$$(65) \quad \gamma = u L' L^{-1}$$

sera l'équation du cône, lieu des axes instantanés, *dans le corps ramené à sa position initiale*.

On sait que le mouvement que nous étudions n'est autre que le roulement du cône  $(\gamma)$  sur le cône  $(z)$ .

Rien n'est plus facile que d'obtenir l'équation du cône  $(\gamma)$  transporté avec le corps mobile dans une position particulière quelconque de celui-ci, correspondant à la valeur  $\Lambda$  attribuée à  $L$ . Il suffit, en effet, pour cela de faire subir au cône  $\gamma$  la rotation  $\Lambda^{-1} ( ) \Lambda$ , ce qui donne

$$(66) \quad \gamma = u \Lambda^{-1} L' L^{-1} \Lambda.$$

Il est à remarquer qu'ici  $\Lambda$  est constant et  $L$  variable. Si l'on attribue à  $L$  la valeur particulière  $\Lambda$ , il vient  $\gamma = z$ . L'axe instantané est, en

effet, une génératrice commune aux deux cônes roulants, dans la position considérée.

Le plan tangent commun, le long de cette génératrice, est normal à la droite

$$67) \quad \mathfrak{U}.zz' = 4\mathfrak{U}.L^{-1}L'[L^{-1}L'' - (L^{-1}L')^2] = \frac{\omega^2}{2}z + 2\mathfrak{U}zL^{-1}L''.$$

18. Soient  $x, y$  les vecteurs de deux points quelconques du corps à un même instant. Nous avons, en vertu des formules (54) et (60),

$$x' = \mathfrak{U}.xz, \quad y' = \mathfrak{U}.yz,$$

et par conséquent

$$68) \quad \mathfrak{U}.x'y' = z\mathfrak{S}.xzy = 4L^{-1}L'\mathfrak{S}.xL^{-1}L'y.$$

L'interprétation de la première partie de cette formule donne lieu à la construction suivante.

$X$  et  $Y$  étant les positions simultanées de deux points du corps,  $OX'$  et  $OY'$  des droites égales et parallèles à leurs vitesses respectives et menées par l'origine, l'axe instantané  $OZ$  sera perpendiculaire au plan  $OX'Y'$ . Portons sur cette droite une longueur  $OT$  quelconque, et construisons les deux tétraèdres  $OTX'Y'$ ,  $OTXY$ . Le rapport des volumes de ces deux solides nous donnera le carré de la vitesse angulaire.

#### Mouvements relatifs. — Théorème de Coriolis.

19. Soient  $(M)$  un milieu en repos absolu, et  $(N)$  un milieu mobile, entraîné d'un certain mouvement.

Si  $X$  est un point mobile dans l'espace d'une manière quelconque, et qu'un observateur soit emporté par le milieu  $(N)$ , le mouvement du point  $X$  rapporté à ce milieu supposé immobile sera le mouvement *relatif* du point, ou, ce qui revient au même, le mouvement *apparent* pour l'observateur dont nous venons de parler. Le mouvement du même point rapporté à  $(M)$  est au contraire son mouvement *absolu*.

Le milieu  $(N)$ , supposé d'abord en coïncidence avec  $(M)$ , peut être



amené à sa position à un instant quelconque par les deux mouvements successifs que voici : 1° une translation tout d'une pièce ; 2° une certaine rotation autour d'un point fixe. Soient  $s$  la translation,  $L^{-1}$  la rotation. Si nous ramenons par la pensée le milieu  $\{N\}$  à sa position initiale avec le point  $X$  et si nous appelons  $x_r$  le vecteur relatif de ce point  $X$  ainsi ramené en  $X_r$ , il est bien évident que nous aurons

$$69 \quad x = s + L^{-1}x_rL.$$

· Prenons les dérivées

$$70 \quad x' = [L^{-1}x'_rL] + [s' + (L^{-1})'x_rL + L^{-1}x_rL'].$$

Le premier membre exprime la vitesse absolue ; la première quantité entre crochets représente évidemment la vitesse relative dans la position considérée. Quant à la seconde quantité entre crochets, c'est la dérivée de  $s + L^{-1}x_rL$ ,  $x_r$  étant considéré comme constant. C'est donc la vitesse d'entraînement, et nous pouvons dire que la vitesse absolue a pour composantes la vitesse relative et la vitesse d'entraînement.

Pour trouver maintenant l'accélération, prenons la dérivée de l'équation (70), et il viendra

$$71 \quad \left\{ \begin{aligned} x'' &= [L^{-1}x''_rL] + [s'' + (L^{-1})''x_rL + L^{-1}x_rL'' + 2(L^{-1})'x_rL'] \\ &+ 2[L^{-1}x'_rL + L^{-1}x_rL']. \end{aligned} \right.$$

On reconnaît comme tout à l'heure que les deux premières expressions entre crochets sont l'accélération relative, et celle d'entraînement. Quant à la troisième, c'est la dérivée de  $L^{-1}x'_rL$ ,  $x'_r$  étant supposé constant ; de sorte que si, par un point de l'axe autour duquel s'effectue la rotation instantanée, nous menons une droite égale et parallèle à la vitesse relative, la troisième quantité entre crochets représentera la vitesse de l'extrémité de cette droite, dans le mouvement de rotation. Ainsi :

*L'accélération absolue s'obtient par la composition :*

- 1° De l'accélération relative ;
- 2° De l'accélération d'entraînement ;

3° *Du double de la vitesse de l'extrémité de la vitesse relative, dans le mouvement de rotation instantanée, cette vitesse relative étant transportée parallèlement à elle-même de manière que son origine tombe en un point de l'axe instantané.*

On remarquera que cet énoncé du théorème de Coriolis est un peu différent de celui qu'on donne dans la plupart des traités classiques. Celui-ci nous paraît avoir l'avantage de faire disparaître immédiatement toute ambiguïté sur le sens de la troisième composante. Quant à sa grandeur, il résulte évidemment de l'énoncé précédent qu'elle est égale à  $2\omega v_r \sin \tau$ ,  $\omega$  étant la vitesse angulaire instantanée,  $v_r$  la vitesse relative, et  $\tau$  l'angle de cette vitesse avec l'axe instantané.

On déduirait aussi cette expression de l'accélération centrifuge composée, de la formule (54) ci-dessus, laquelle en donne en même temps la direction et le sens.

Il semble difficile d'imaginer une démonstration analytique plus simple de ce théorème important.

## DEUXIÈME PARTIE : STATIQUE.

### *Représentation des forces, des moments et des couples.*

20. On sait qu'une force peut se représenter par une droite en longueur et en direction. Si donc le point d'application est donné, et pris pour origine, par exemple, nous pourrions exprimer la force en question par le vecteur  $F$ . Mais il y a une distinction importante à établir; c'est que la position du vecteur  $F$  dans l'espace ne le modifie en rien, au point de vue de ses propriétés analytiques; il reste toujours égal à lui-même lorsqu'il se transporte ainsi parallèlement; tandis que l'action de la force, au contraire, est essentiellement dépendante de sa position absolue dans l'espace, en même temps que de sa grandeur et de sa direction.

Conséquemment, pour bien définir une force  $AF$ , appliquée en un

point A, nous nous donnerons à la fois le vecteur  $F = AF$ ; et aussi le vecteur  $a = OA$  du point d'application, O étant une origine fixe arbitraire.

Le *moment* de la force dont nous venons de parler, par rapport à l'origine, a pour valeur  $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{U} \cdot AF$ , et il est dirigé dans le plan OAF.

Le moment de la même force par rapport à un point quelconque C de l'espace, donné par  $c = OC$  sera  $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{U} \cdot (A - c) \cdot F$ , et sa direction est celle du plan CAF.

Nous ne nous arrêterons pas à démontrer en partant de ces expressions les théorèmes simples sur les moments que l'on trouve dans tous les traités de Mécanique rationnelle; mais il nous est impossible de ne pas indiquer immédiatement la représentation de la conception si remarquable de Poinsot : la notion du *couple* s'introduit en effet ici comme d'elle-même, puisqu'on peut dire qu'un couple n'est qu'un certain moment donné en grandeur et en direction. Et, d'après ce qui précède, on voit que le couple (AF, OF'), formé de la force F ci-dessus et d'une force opposée appliquée à l'origine, a pour expression

$$- \mathfrak{U} \cdot AF \quad \text{ou} \quad \mathfrak{U} \cdot FA, \quad .$$

et que le couple (AF, CF''), C étant un point arbitraire, a pour expression

$$\mathfrak{U} \cdot F(A - C),$$

en représentant les couples par leurs *axes*, comme le fait Poinsot.

Par suite, la composition des couples s'effectuera par une simple addition de vecteurs, de même que la composition des forces appliquées en un même point.

Si nous convenons de représenter par  $F_A$  la force  $F$  appliquée en A, et par  $F \binom{A}{B}$  le couple formé de la force  $+ F$  appliquée en A, et  $- F$  appliquée en B, nous pouvons écrire

$$(1) \quad F_A = F_A - F_0 + F_0 = F_0 + F \binom{A}{0} = F_0 + [\mathfrak{U} FA],$$

$$(2) \quad F_A = F_A - F_B + F_B = F_B + F \binom{A}{B} = F_B + [\mathfrak{U} \cdot F(A - B)];$$

nous mettons seulement entre crochets les  $\mathfrak{U}$ , qui représentent des couples, pour éviter toute confusion, puisqu'il s'agit ici d'une représentation symbolique, et que les couples sont irréductibles avec les forces. C'est ce que nous ferons constamment dans nos calculs, chaque fois que des forces et des couples y figureront simultanément. Les quantités entre crochets devront toujours se calculer séparément, et ne se combineront qu'entre elles. Nous ferons, au contraire, disparaître les crochets lorsque nous ne considérerons que des couples, puisqu'il n'y aura plus aucune confusion à redouter.

Il importe de ne pas perdre de vue la notation

$$(3) \quad [\mathfrak{U}.ML] = M_L - M_O = - (M_O - M_L) = (L_O - L_M) = - (L_M - L_O).$$

On a aussi

$$\begin{aligned} L_M + M_L &= L_O + M_O = (L + M)_O, \\ L_M - M_L &= L_O - M_O + 2L \begin{pmatrix} M \\ O \end{pmatrix} = L_O - M_O - 2M \begin{pmatrix} L \\ O \end{pmatrix} \\ &= L_O - M_O + 2[\mathfrak{U}.LM] = L_O - M_O - 2[\mathfrak{U}.ML]. \end{aligned}$$

Il est à remarquer que, dans la notation  $F \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathfrak{U}.F(A - B)$ , nous pouvons, sans altérer la valeur, ajouter un vecteur quelconque aux deux vecteurs entre parenthèses. En faisant permuter ces deux vecteurs, nous changeons le signe. Le vecteur inférieur étant réduit à zéro, nous pouvons aussi faire permuter  $F$  avec le vecteur supérieur, et il en résulte encore un simple changement de signe. Ainsi

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} F \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} A + C \\ B + C \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} A - B \\ O \end{pmatrix} = -F \begin{pmatrix} B \\ A \end{pmatrix} = -F \begin{pmatrix} B - A \\ O \end{pmatrix} \\ &= -(A - B) \begin{pmatrix} F \\ O \end{pmatrix} = (B - A) \begin{pmatrix} F \\ O \end{pmatrix} = -F \begin{pmatrix} -A \\ -B \end{pmatrix} \\ &= -F \begin{pmatrix} A \\ 2A - B \end{pmatrix} = -F \begin{pmatrix} 2B - A \\ B \end{pmatrix} = \dots \end{aligned} \right.$$

Toutes ces transformations, et celles qu'on pourrait encore déduire de là, sont d'une interprétation très-facile.

Le moment d'une force  $F_A$  par rapport à un axe  $z$  passant par l'ori-

gine a pour expression  $-\mathfrak{S}(z. \mathbf{U}_{FA}) = -\mathfrak{S}.zFA = -\mathfrak{S}.FAZ$ , si nous prenons pour  $z$  un vecteur unitaire. Si deux quelconques des trois éléments  $F, A, z$  deviennent parallèles, le moment devient nul. Il en est de même si  $z$  est dirigé, en général, dans le plan passant par l'origine et la force.

*Centres de gravité.*

21. Si  $F = f'F, F'' = f''F, \dots$  sont des forces parallèles appliquées respectivement en des points  $A', A'', \dots, F$  étant un vecteur unitaire, leur résultante sera une force  $n = \Sigma f.F$ , appliquée en un certain point  $G$ , lequel n'est autre que le *centre des forces parallèles* considérées, ou, en d'autres termes, le *centre de gravité* des points  $A', A'', \dots$  de poids  $f', f'', \dots$ .

Pour déterminer le centre de gravité, prenons les moments de toutes ces forces par rapport à un axe quelconque  $z$  passant par l'origine. Le moment de la résultante étant égal à la somme des moments des composantes, nous aurons, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\mathfrak{S}.RGZ = \Sigma \mathfrak{S}.FAZ$$

ou

$$\mathfrak{S}(\Sigma f.F.GZ) = \mathfrak{S}(F.\Sigma f.A.Z).$$

De là, cette relation devant subsister quel que soit  $z$ , nous pouvons y satisfaire en écrivant

$$\Sigma f.G = \Sigma f.A,$$

ou

$$(5) \quad G = \frac{\Sigma f.A}{\Sigma f}.$$

Cette valeur de  $G$  est indépendante de  $F$ . Il est bien clair, en effet, qu'on n'altérerait pas la relation ci-dessus en  $\mathfrak{S}$ , en ajoutant à  $G$  un vecteur quelconque parallèle à  $F$ . Mais, en nous imposant la condition que le point  $G$  soit indépendant de la direction de  $F$ , nous avons nécessairement la formule (5).

22. Le centre de gravité d'un corps solide (supposé continu), de poids  $P$ , de volume  $v$  et de densité  $p$  au point  $A$ , sera donné par

$$(6) \quad G = \frac{\Sigma p \, dv \, A}{P},$$

le signe  $\Sigma$  étant une certaine intégrale qui s'étend jusqu'aux limites du corps. Si celui-ci est homogène,

$$(7) \quad G = \frac{\Sigma (dv \, A)}{v}.$$

Ces formules sont également applicables aux surfaces et aux lignes, en supposant que  $v$  représente alors une aire ou une longueur.

23. La formule (5) nous permet d'établir une propriété assez importante du centre de gravité. Si, pour chaque point  $A$  d'un système, on fait le produit du poids (ou de la masse) par le carré de la distance à un point fixe  $c$ , on a

$$\begin{aligned} -f(A-c)^2 &= -fA^2 - fC^2 + 2f \mathfrak{S} AC \\ &= -fA^2 + \mathfrak{S} \cdot (2fA - fC)C. \end{aligned}$$

Si nous faisons, pour tout le système considéré, la somme de ces *moments d'inertie polaire*, nous avons

$$- \Sigma fA^2 + \mathfrak{S} \cdot (2 \Sigma fA - \Sigma f \cdot C)C.$$

Cherchons le minimum de ce moment total d'inertie polaire. Pour cela, donnons à  $c$  un accroissement  $dc$ , et prenons la différentielle. Nous aurons

$$(8) \quad 2 \mathfrak{S} \cdot (\Sigma fA - \Sigma f \cdot c) dc,$$

et, si elle se réduit à zéro quel que soit  $dc$ , il vient

$$c = \frac{\Sigma fA}{\Sigma f}.$$

Ce point  $c$  est celui pour lequel a lieu le minimum. La comparaison avec la formule (5) nous montre que  $c = c$ , si bien que le centre de gravité d'un corps est le point pour lequel le moment d'inertie polaire est minimum.

L'expression différentielle (8) peut encore s'écrire

$$2 \Sigma f. \mathfrak{S}. (c - c) dc,$$

et, comme elle s'annule pour tout déplacement  $dc$  perpendiculaire à  $c - c$ , il en résulte que *le moment d'inertie polaire total est le même pour tous les points d'une sphère quelconque* ayant son centre au centre de gravité.

24. Pour éviter des développements trop étendus, je n'ai point l'intention d'étudier ici les nombreuses propriétés des centres de gravité. J'en ai indiqué quelques-unes dans une addition à ma traduction de la *Méthode des équipollences*, de M. Bellavitis, et il est à remarquer que les conclusions trouvées à ce sujet dans le plan s'étendent immédiatement à l'espace, puisque les vecteurs ne sont ici combinés que par voie d'addition. Ces diverses propriétés ne sont du reste que des conséquences élémentaires de la formule (5).

Mais, comme exemple très-simple de l'utilité de cette formule, nous allons traiter un seul cas, celui du centre de gravité d'un arc d'hélice homogène.

Soient  $r$  le rayon du cylindre,  $k$  le pas de l'hélice. Prenons trois axes rectangulaires, dirigés, l'un suivant le rayon du cylindre aboutissant à l'origine de l'arc donné, le second perpendiculairement au précédent et à l'axe du cylindre, le troisième suivant l'axe du cylindre; et soient respectivement  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  des vecteurs unitaires suivant ces axes.

L'hélice est représentée par l'équation

$$x = r \cos t. \mathbf{i}_1 + r \sin t. \mathbf{i}_2 + \frac{k}{4} t \mathbf{i}_3;$$

de là

$$dx = \left( -r \sin t. \mathbf{i}_1 + r \cos t. \mathbf{i}_2 + \frac{k}{4} \mathbf{i}_3 \right) dt,$$

$$\mathfrak{C} dx = ds = dt \sqrt{r^2 + \frac{k^2}{16}}.$$

Pour appliquer la formule (5), il faut y remplacer  $a$  par  $x$ ,  $f$  par  $ds$ , et alors

$$G = \frac{\int_0^t \sqrt{r^2 + \frac{k^2}{16}} \left( r \cos t_1 + r \sin t_1 + \frac{k}{4} t_1 \right) dt}{\int_0^t \sqrt{r^2 + \frac{k^2}{16}} dt},$$

$$(9) \quad G = \frac{r \sin t}{t} I_1 + \frac{r(1 - \cos t)}{t} I_2 + \frac{kt}{8} I_3.$$

Les trois coordonnées de ce centre de gravité sont donc

$$\frac{r \sin t}{t}, \quad \frac{r(1 - \cos t)}{t}, \quad \frac{kt}{8},$$

pour le système d'axes considéré; c'est-à-dire que, si nous appelons  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  les coordonnées de l'extrémité de l'arc l'hélice donné,  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$  celles du centre de gravité de cet arc, nous avons

$$(10) \quad \bar{x}_1 = \frac{kx_2}{4x_3}, \quad \bar{x}_2 = \frac{k(r - x_1)}{4x_3}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_3}{2}.$$

Si la courbe, au lieu d'être homogène, a une densité proportionnelle à la longueur de l'arc depuis l'origine, nous devons remplacer  $ds$  par  $ptds$  dans les formules ci-dessus,  $p$  étant constant, ce qui donnera, à la place de la formule (9),

$$G' = 2r \left( \frac{\cos t - 1}{t} + \frac{\sin t}{t} \right) I_1 + 2r \left( \frac{\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t} \right) I_2 + \frac{kt}{6} I_3,$$

et à la place des formules (10)

$$\bar{x}'_1 = \frac{k}{2x_3} \left[ \frac{k(x_1 - r)}{4x_3} + x_2 \right], \quad \bar{x}'_2 = \frac{k}{2x_3} \left( \frac{kx_2}{4x_3} - x_1 \right), \quad \bar{x}'_3 = \frac{2}{3} x_3.$$

*Équilibre d'un corps solide. — Composition générale des forces.*

23. Désignons, comme au n° 20, par  $F_A$  une force  $F$  appliquée en  $A$ , et considérons un système de forces  $F_1, F_2, F_3, \dots$  respectivement



appliquées sur un corps solide en  $A_1, A_2, A_3, \dots$ . La condition d'équilibre du système considéré peut évidemment s'écrire sous la forme

$$(11) \quad \Sigma F_A = 0,$$

ou, en vertu de l'équation (1),

$$(12) \quad \Sigma F_0 + [\Sigma \mathfrak{U}.FA] = 0.$$

Nous rappelant l'irréductibilité des forces avec les couples, et supprimant, pour simplifier, l'indice zéro des forces appliquées à l'origine, nous voyons que cette condition se décompose dans les deux suivantes :

$$(13) \quad \Sigma F = 0,$$

$$(14) \quad \Sigma \mathfrak{U}.FA = 0.$$

Maintenant,  $x$  étant un vecteur arbitraire, la relation (13) nous donne  $\mathfrak{U}.x\Sigma F = 0$ , et par conséquent

$$(15) \quad \mathfrak{U}.x\Sigma F = \Sigma.\mathfrak{U}.AF,$$

ou

$$(16) \quad \Sigma \mathfrak{U}.F(A - x) = 0,$$

et réciproquement, si cette relation a lieu *quel que soit*  $x$ , on en déduit (13) et (14).

Donc la condition (16) est équivalente à (12) ou (11), et exprime à elle seule l'équilibre du système.

Il est facile, du reste, d'interpréter ces diverses formules séparément. Ainsi (13) signifie que la *somme* (ou *résultante*) de toutes les forces transportées à l'origine est nulle; (14), que le *couple résultant* produit par le transport des forces à l'origine est nul; (12), que ces deux conditions sont à la fois réalisées; (15) ou (16), que le *couple résultant*, produit par le transport des forces *en un point quelconque*  $x$ , est nul. Cette dernière condition est donc nécessaire et suffisante pour que l'équilibre ait lieu.

26. Supposons que la condition suivante soit remplie :

$$(17) \quad \mathfrak{S}(\Sigma \mathbf{F} \cdot \Sigma \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \mathbf{A}) = 0,$$

sans que  $\Sigma \mathbf{F}$  s'annule.

Alors (15) ou (16) représente une droite en prenant  $x$  comme vecteur variable, et le système des forces considérées a une résultante unique  $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{R}$ , appliquée en un point quelconque  $x$  de cette droite : car

$$\mathbf{R}x = \mathbf{R}_0 + [\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}x] = \Sigma \mathbf{F}_0 + [\Sigma \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \mathbf{A}] = \Sigma \cdot \mathbf{F} \mathbf{A},$$

en vertu de (15).

La condition (17) exprime que la direction de la résultante est située dans le plan du couple résultant.

Si la relation (13) est satisfaite, mais que (14) ne le soit pas, le système des forces se réduit au contraire à un couple exprimé par  $[\Sigma \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \mathbf{A}]$ , quelle que soit du reste la position de l'origine.

Tout à l'heure le système tendait à produire une *translation*, et dans le dernier cas, il tend à produire une *rotation*.

Si maintenant ni l'une ni l'autre des équations (13) et (14) n'est satisfaite, nous pouvons chercher à déterminer le point  $x$ , de telle sorte que la force résultante soit perpendiculaire au plan du couple résultant, produit par le transport au point  $x$ . Cela nous donnera la condition

$$\mathbf{U}[\Sigma \mathbf{F} \cdot \Sigma \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \mathbf{A} - x] = 0,$$

ou

$$(18) \quad \mathbf{U} \frac{\Sigma \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \mathbf{A} - x}{\Sigma \mathbf{F}} = 0.$$

Cette équation, en prenant  $x$  comme variable, représente une droite autour de laquelle les forces tendent à faire tourner le solide, et suivant laquelle elles tendent à le transporter. En d'autres termes, c'est l'axe du *mouvement de vis* que tendent à produire les forces en question. Nous l'appellerons *axe central* du système.

On arrive encore à déterminer cet axe par la condition que  $\mathfrak{C}[\Sigma \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \mathbf{A} - x]$  soit un minimum, ce qui fournit une nouvelle propriété d'un énoncé facile. Dans ce but, posons pour un instant  $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{R}$ ,

comme plus haut, et aussi  $\Sigma \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \Lambda = c$ . L'expression à rendre minimum est  $\mathfrak{C}(c - \mathbf{U}_{RX}) = \mathfrak{C}(c - \gamma)$ , si nous écrivons  $\mathbf{U}_{RX} = \gamma$ . Élevant au carré,

$$- \mathfrak{C}^2(c - \gamma) = c^2 + \gamma^2 - c\gamma - \gamma c,$$

et formant la dérivée, à un facteur réel près, nous avons

$$\begin{aligned} \gamma d\gamma + d\gamma \gamma - c d\gamma - d\gamma c \\ = (\gamma - c)d\gamma + d\gamma(\gamma - c) &= 2\mathfrak{S} \cdot (\gamma - c)d\gamma \\ &= 2\mathfrak{S} \cdot (\mathbf{U} \cdot \Sigma \mathbf{F} X - \Sigma \mathbf{U} \mathbf{F} \Lambda) \Sigma \mathbf{F} dX \\ &= - 2\mathfrak{S} \cdot dX \mathbf{U} [\Sigma \mathbf{F} \cdot \Sigma \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} (X - \Lambda)]_J. \end{aligned}$$

Si nous égalons cette dérivée à zéro, *quel que soit*  $dX$ , nous trouvons immédiatement la relation (18) pour le cas du minimum.

Cela serait facile à démontrer aussi géométriquement.

27. Avec les notations que nous venons d'employer, l'équation (18) de l'axe peut s'écrire

$$(19) \quad \mathbf{U} \left( \frac{\mathbf{U}_{RX}}{R} \right) = \mathbf{U} \frac{c}{R} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{U}_{RX}}{R} = \mathbf{U} \frac{c}{R}.$$

Si nous prenons le vecteur  $x$  abaissé perpendiculairement de l'origine sur cette droite, nous voyons qu'il s'exprime par  $\mathbf{U} \frac{c}{R}$ , car alors  $\mathbf{U}_{RX} = R x$ .

D'autre part, la valeur du *moment central*, c'est-à-dire du moment par rapport à l'axe central est  $\mathfrak{C}(c - \mathbf{U}_{RX})$ ,  $x$  représentant l'un quelconque des points de l'axe central, et si nous divisons la grandeur de ce moment par celle de la résultante  $n$ , nous avons

$$\mathfrak{C} \left( \frac{c}{R} - \frac{\mathbf{U}_{RX}}{R} \right) = \mathfrak{C} \left( \frac{c}{R} - \mathbf{U} \frac{c}{R} \right) = \mathfrak{C} \mathfrak{S} \frac{c}{R} = \mathfrak{S} \frac{c}{R}.$$

Il suit de là que, si nous posons  $\frac{c}{R} = Q = Q_0 + Q_i$ , un quaternion, les deux éléments  $Q_0$  et  $Q_i$  s'interprètent comme nous venons de le dire. Le quaternion  $Q$  peut encore s'écrire  $\frac{\Sigma \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} \Lambda}{\Sigma \mathbf{F}}$ , et par suite se forme im-

médiatement avec les données ; et nous voyons que, si sa partie réelle s'annule, le système peut se composer en une résultante unique. Si, au contraire, c'est son vecteur qui est égal à zéro, alors l'axe central du système passe par l'origine.

Prenons maintenant un nouveau quaternion auxiliaire

$$(20) \quad S = S_0 + S_i = \frac{\Sigma_i \cdot F_A}{\Sigma_F} = Q + \frac{\Sigma S_i \cdot F_A}{\Sigma_F}.$$

Alors

$$(21) \quad Q_0 = S_0 = j,$$

et l'expression  $j\Sigma_F$  ou  $jR$  représente l'axe du couple central en grandeur et en direction.

De plus,

$$(22) \quad S_i = Q_i + \frac{\Sigma S_i \cdot F_A}{\Sigma_F} = K$$

est le vecteur d'un point K situé sur l'axe central, et dont la position sur cet axe est complètement indépendante du choix de l'origine.

23. Ces formules nous conduisent immédiatement aux transformations suivantes :

$$(23) \quad \Sigma F_A = \Sigma F \cdot (j + K) = R(j + K),$$

$$(24) \quad \mathfrak{C} \Sigma F_A = \mathfrak{C} \Sigma F \cdot \sqrt{j^2 - K^2} = \mathfrak{C} R \cdot \sqrt{j^2 - K^2},$$

$$(25) \quad \Sigma \mathbf{U} F_A = j \Sigma F + \mathbf{U} \cdot \Sigma F \cdot K, \quad \text{ou} \quad C = jR + \mathbf{U} \cdot R \cdot K,$$

$$(26) \quad (\Sigma \mathbf{U} \cdot F_A)^2 = j^2 (\Sigma F)^2 + [\mathbf{U} (\Sigma F \cdot K)]^2, \quad \text{ou} \quad C^2 = j^2 R^2 + (\mathbf{U} \cdot R \cdot K)^2.$$

La formule (25) nous montre que le couple résultant du transport de toutes les forces en un même point O varie généralement *en direction* et *en grandeur* avec la position de ce point ; tandis que, d'après (26), nous voyons que la *grandeur* du moment de ce couple est la même pour tous les points d'une surface cylindrique de révolution ayant pour axe l'axe central.

En appelant *moment complet* d'une force  $F$ , par rapport à l'origine le quaternion  $F_A$ , le premier membre de (23),  $\Sigma F_A$ , nous représentera le

moment complet du système tout entier ; et, d'après (24), la *grandeur* de ce moment complet reste constante lorsque l'origine se déplace sur une surface sphérique ayant pour centre le point K. Si l'origine est prise au point K lui-même, cette grandeur devient alors égale à celle du moment central.

Nous désignerons ce point K sous le nom de *centre du système*.

On a déjà remarqué sans doute l'analogie entre la formule (20) qui fournit le point K, et la formule (5) donnant le centre G d'un système des forces parallèles. Le point K coïncide en effet avec G si les forces que nous étudions ici deviennent toutes parallèles entre elles ; et ce centre, comme on l'a déjà vu du reste, est indépendant de la direction de ces forces, si bien que lorsqu'elles tournent respectivement autour de leurs points d'application sans changer de grandeur et en restant parallèles, leur résultante unique, considérée comme appliquée en G, tourne également autour de ce point.

29. Supposons maintenant les forces F, non plus parallèles entre elles, mais parallèles à un même plan. Si nous les faisons tourner respectivement d'un même angle et dans le même sens, autour d'axes perpendiculaires à ce plan, sans changer leurs points d'application, chaque force F se transformera en  $L_F$ , L étant un certain quaternion unitaire ayant pour axe la direction des axes de rotation. Le nouveau centre des forces sera donc fourni par l'expression

$$(27) \quad \frac{\sum L_F A}{\sum L_F} = \frac{L \sum F A}{L \sum F} = \frac{\sum F A}{\sum F} = j + k.$$

Ainsi, lorsque les forces tournent comme nous venons de le dire, le centre des forces n'éprouve aucune variation, non plus que le moment central.

Si toutes les forces sont dans un même plan, alors, en prenant l'origine dans ce plan, tous les vecteurs F et A sont coplanaires, et l'on voit sans peine que le point K est situé dans le même plan.

Ce point K, dans ce cas particulier, est le même que celui qu'on détermine pour un tel système de forces dans la méthode des équipollences (voir, par exemple, *Exposition de la méthode des équipol-*

lences, par M. Bellavitis, n° 120); mais l'algorithme des équipollences n'étant pas le même que celui des quaternions, la formule qui fournit ce point n'a plus la même forme. Ainsi, en continuant de représenter les vecteurs par les mêmes lettres, mais employant par ailleurs les notations de M. Bellavitis, le point K serait donné par la relation

$$K = \frac{\sum c_{F,A}}{\sum c_F}.$$

Dans les équipollences, en effet, toutes les expressions qu'on obtient, et en particulier le numérateur du second membre de l'équation qui précède, représentent des vecteurs coplanaires; en outre, la multiplication est toujours commutative, et les règles de calcul sont essentiellement différentes. Si l'on se rappelle que dans la méthode dont nous parlons tout vecteur s'exprime par une quantité imaginaire ordinaire de la forme  $x + yi$ , on voit qu'en posant  $F = a + bi$ , la formule que nous venons de rappeler revient à  $K = \frac{\sum_i (a - bi)_A}{\sum_i (a - bi)}$ , et si on la rapproche de celle qui donne le centre de gravité ordinaire, aussi bien dans le calcul des équipollences que dans celui des quaternions, on peut dire que le point K est le *centre de gravité d'un certain nombre de points situés dans un même plan et affectés de masses imaginaires*.

Cette digression relative aux équipollences nous a semblé utile en ce qu'elle montre que les résultats que nous avons obtenus par les quaternions constituent une généralisation de ceux-ci; de sorte qu'un langage qui paraît tout d'abord exclusivement symbolique prend au contraire une signification *réelle* et *physique* très-nette, par le secours des nouvelles méthodes; et qu'il s'étend même parfois (comme nous venons de le voir en passant des équipollences aux quaternions) sans rien perdre de sa réalité.

50. La transformation de F en  $LF$ , que nous avons effectuée au commencement du numéro précédent, est applicable au cas d'un système quelconque; mais elle n'a plus d'intérêt comme application, parce que les vecteurs se transforment en quaternions, de sorte que toute interprétation devient impossible.

Cherchons, au lieu de cela, à faire tourner chaque force autour d'un

axe de direction  $L$  donné, l'amplitude  $2\lambda$  de la rotation étant la même;  $F$  alors deviendra  $L^{-1}FL^\lambda$ ; et, pour trouver ce que devient le quaternion  $\frac{\Sigma FA}{\Sigma F}$ , nous l'écrivons sous la forme

$$\frac{1}{\Sigma F^2} \Sigma F \cdot \Sigma FA.$$

Effectuant la substitution indiquée, nous avons

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(\Sigma F)^2} L^{-1} \Sigma F \Sigma FL^\lambda A &= \frac{1}{\Sigma F^2} L^{-1} \Sigma F (\Sigma FAL^\lambda - 2 \sin \lambda \Sigma F \mathfrak{U}_{AL}) \\ &= L^{-1} \frac{\Sigma FA}{\Sigma F} L^\lambda - 2 \sin \lambda L^{-1} \frac{\Sigma F \mathfrak{U}_{AL}}{\Sigma F}. \end{aligned} \right.$$

Si nous supposons le cas particulier où tous les points d'application sont situés sur une même droite passant par l'origine, et si nous prenons cette droite pour axe de rotation  $L$ , nous voyons que  $\mathfrak{U}_{AL}$  s'évanouit; alors le terme  $\frac{\Sigma FA}{\Sigma F}$  n'a fait que subir une rotation pareille à celle des forces, de telle sorte que le centre des forces a tourné lui aussi du même angle autour de l'axe  $L$ , et que le moment central n'a subi aucune altération.

Au contraire, si tous les points  $A$  sont coplanaires avec l'origine, et qu'on prenne des axes normaux à leur plan, on trouve que la rotation des forces a pour effet de transformer  $\frac{\Sigma FA}{\Sigma F}$  en  $L^{-1} \frac{\Sigma FA}{\Sigma F} L^{-\lambda}$ .

**31.** Des développements qui précèdent on peut déduire une autre forme de l'équation générale de l'équilibre précédemment établie (n° 23). Il suffit d'égaliser le moment complet  $\Sigma FA$  à une quantité réelle constante  $m$ , indépendante de l'origine. En effet, l'équation

$$(29) \quad \Sigma FA = m$$

équivalant (n° 28) à

$$j_R + r_K = m \quad \text{ou} \quad j_R + \mathfrak{U}_{RK} = 0,$$

c'est-à-dire  $c = 0$ , quelle que soit l'origine; ce qui est une condition nécessaire et suffisante de l'équilibre, comme nous l'avons déjà dit.

Hamilton propose d'appeler la constante *m tension totale* du système.

52. Un système quelconque de forces étant donné, proposons-nous de trouver deux forces  $x, y$ , qui, appliquées en  $m, n$ , soient équivalentes au système primitif.

Nous avons

$$x_M = x_0 + x_M - x_0 = x_0 + x \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y_N = y_0 + y_N - y_0 = y_0 + y \begin{pmatrix} N \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les équations à résoudre sont donc

$$(30) \quad x + y = R, \quad \mathbf{U}_{XM} + \mathbf{U}_{YN} = C,$$

d'où

$$\mathbf{U}_{XM} + \mathbf{U}_{(R-x)N} = C,$$

$$\mathbf{U}_{x(M-N)} = C - \mathbf{U}_{RN},$$

$$x = (C - \mathbf{U}_{RN}) \frac{1}{M-N} + x(M-N).$$

On trouverait une valeur analogue pour  $y$ . Comme  $x, y$  doivent être des vecteurs, la condition de possibilité du problème est

$$\mathfrak{S} \cdot (C - \mathbf{U}_{RN}) \frac{1}{M-N} = 0.$$

Du reste, cette condition étant remplie, les termes en  $x$  et  $y$  peuvent être omis, comme exprimant des forces opposées agissant le long de la même droite  $m - n$ .

53. Il est possible d'établir enfin sous une nouvelle forme l'équation d'équilibre d'un corps solide, en employant le principe du travail virtuel. En effet,  $A$  étant toujours le point d'application de la force  $F$ , et  $\delta A$  représentant le déplacement du point d'application, nous voyons sans peine que le travail correspondant de la force  $F$  est représenté par  $-\mathfrak{S} \cdot F \delta A$ , de sorte que l'équation cherchée est

$$(31) \quad \Sigma \mathfrak{S} \cdot F \delta A = 0.$$



Il est facile de reconnaître que cette équation résume les formules (13) et (14) ci-dessus; car le déplacement le plus général d'un corps solide équivaut à une translation et une rotation; la translation peut se représenter par  $E$ , et la rotation [n° 13, formule (53)], par  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$ .  $E$  et  $\mathbf{T}$  étant des vecteurs infiniment petits, puisqu'il s'agit d'un déplacement élémentaire. Ainsi  $\delta \mathbf{A} = E + \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{T}$ , et

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} \cdot E \delta \mathbf{A} &= \mathfrak{S} \cdot E E + \mathfrak{S} \cdot E \mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathfrak{S} \cdot E E + \mathfrak{S} \cdot \mathbf{T} \mathbf{U} \mathbf{F} \mathbf{A}, \\ \sum \mathfrak{S} \cdot E \delta \mathbf{A} &= \mathfrak{S} \cdot (\sum F \cdot E) + \mathfrak{S} \cdot \mathbf{T} \sum \mathbf{U} \mathbf{F} \mathbf{A}, \end{aligned}$$

d'où

$$\sum F = 0, \quad \text{et} \quad \sum \mathbf{U} \mathbf{F} \mathbf{A} = 0.$$

### Moments d'inertie.

54. Le moment d'inertie d'un système matériel par rapport à un axe est fourni par la somme des produits obtenus en multipliant la masse de chaque point matériel du système par le carré de sa distance à l'axe considéré.

Prenons l'origine  $A$  sur cet axe, et soient  $x$  un vecteur dirigé suivant l'axe en question, et  $\mathbf{m}$  le vecteur aboutissant au point  $M$  du système, point dont la masse est  $m$ . Le moment d'inertie sera

$$\sum m \mathfrak{C}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{M} \mathbf{U} x^2),$$

ou

$$(32) \quad x^{-2} \sum m (\mathbf{U} \cdot \mathbf{M} x)^2.$$

En posant

$$(33) \quad \square x = \sum m \mathbf{M} \mathbf{U} \cdot \mathbf{M} x = x \sum m x^2 - \sum m \mathbf{M} \mathfrak{S} \mathbf{M} x,$$

$\square x$  sera une fonction vectorielle, linéaire et conjuguée à elle-même, et le moment d'inertie pourra encore être mis sous la forme

$$(34) \quad - \mathfrak{S} \cdot x^{-1} \square x.$$

55. Jusqu'à présent, le module de  $x$  est absolument arbitraire; si nous le prenons maintenant égal à l'inverse de la racine carrée du moment d'inertie, il est visible que nous aurons

$$(35) \quad \mathfrak{S} \cdot x \square x = 1$$

pour équation du lieu des extrémités des vecteurs  $x$ . On reconnaît immédiatement sous cette forme l'ellipsoïde d'inertie.

Cet ellipsoïde a pour centre l'origine A. Cherchons maintenant le moment d'inertie du même système par rapport à un axe parallèle à  $x$ , mais passant par un autre point donné B; soit  $\mathbf{b}$  le vecteur AB. Le moment cherché s'obtiendra en remplaçant  $m$  par  $m - \mathbf{b}$  dans l'expression (32) ci-dessus. Ce sera donc

$$(36) \quad x^{-2} m [\mathbf{U} \cdot x (m - \mathbf{b})]^2 = x^{-2} \Sigma m (\mathbf{U}_{xM})^2 + x^{-2} \Sigma m (\mathbf{U}_{xB})^2 \\ - 2 x^{-2} \Sigma m \mathfrak{S} \cdot (\mathbf{U}_{xM} \cdot \mathbf{U}_{xB}),$$

ce qui donne, en appelant  $a$  le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le point A;  $b$  le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le point B;  $\mathfrak{M}$  la masse totale  $\Sigma m$  du système; G le centre de gravité;  $g$  le vecteur  $AG = \frac{\Sigma m \mathbf{x}}{\mathfrak{M}}$ ; et  $p$  la distance  $\mathfrak{C}(\mathbf{U}_B \mathbf{U}_x)$  du point B à l'axe  $x$  passant par A,

$$(37) \quad b = a + p^2 \mathfrak{M} + 2 \mathfrak{M} \mathfrak{S}(\mathbf{b} \mathbf{x}^{-1} \mathbf{U}_{xG}).$$

Si l'axe  $x$  issu du point A passe par le centre de gravité, nous avons  $\mathbf{U}_{xG} = 0$ , et, par conséquent,

$$(38) \quad b = a + p^2 \mathfrak{M},$$

résultat bien connu et auquel nous ne nous arrêterons pas.

56. Il résulte de ce qui précède et de la théorie d'Hamilton sur l'inversion de la fonction linéaire et vectorielle  $\square$ , que les valeurs des trois moments d'inertie principaux  $a_1, a_2, a_3$  en un point quelconque sont données par l'équation du troisième degré

$$(39) \quad a^3 - 2n^2 a^2 + (n^1 + n'^2) a - (n^2 n'^2 - n'^2) = 0,$$

$n^2, n'^2, n''^2$  étant trois quantités réelles positives, savoir :

$$n^2 = -\Sigma m M^2, \quad n'^2 = -\Sigma m m' (\mathfrak{U} M M')^2, \quad n''^2 = -\Sigma m m' m'' (\mathfrak{S} M M' M'')^2.$$

Le produit  $a_1 a_2 a_3$  de ces trois moments peut s'exprimer ainsi

$$\begin{aligned} a_1 a_2 a_3 &= n^2 n'^2 - n''^2 + \Sigma m m' m'' (\mathfrak{S} M M' M'')^2 \\ &= \Sigma m^2 m' M^2 (\mathfrak{U} M M')^2 + \Sigma m m' m'' M^2 (\mathfrak{U} M' M'')^2. \end{aligned}$$

De plus, la fonction  $\square$  satisfait à l'équation symbolique du troisième degré

$$(40) \quad (\square + a_1)(\square + a_2)(\square + a_3) = 0, \quad \text{ou} \quad \varphi(\square) = 0,$$

et les directions des axes principaux d'inertie sont données par

$$(41) \quad A_1 = \frac{\varphi(\square)}{\square + a_1} x, \quad A_2 = \frac{\varphi(\square)}{\square + a_2} x, \quad A_3 = \frac{\varphi(\square)}{\square + a_3} x,$$

$x$  étant un vecteur quelconque.

57. Si nous prenons le module de chaque vecteur  $x$ , égal, non plus à l'inverse de la racine carrée du moment d'inertie, mais simplement à l'inverse du rayon de gyration, l'ellipsoïde d'inertie reste alors semblable à ce qu'il était, mais son équation (35) prend la forme

$$(42) \quad \mathfrak{S} x \square x = \mathfrak{R},$$

Cela posé, cherchons à voir comment on passe de l'ellipsoïde relatif au centre de gravité (ellipsoïde central) à l'ellipsoïde relatif à un point  $A$  quelconque. Si nous désignons par  $\lambda$  le vecteur de ce point rapporté au centre de gravité, et si l'équation particulière de l'ellipsoïde central est

$$(43) \quad \mathfrak{S} x \square_0 x = \mathfrak{R},$$

nous aurons alors, en vertu de la formule (38),

$$\begin{aligned} -\mathfrak{S}x^{-1}\square x &= -\mathfrak{S}.x^{-1}\square_0 x + \partial\mathfrak{R}(\mathfrak{C}\mathfrak{U}.A\mathfrak{U}x^2) \\ &= -\mathfrak{S}.x^{-1}\square_0 x - \partial\mathfrak{R}\mathfrak{S}.x^{-1}.A\mathfrak{U}x, \end{aligned}$$

de sorte que nous pouvons écrire

$$(44) \quad \square x = \square_0 x + \partial\mathfrak{R}.A\mathfrak{U}x = \square_0 x + \partial\mathfrak{R}.A^2 x - \partial\mathfrak{R}.A\mathfrak{S}x.$$

Supposons maintenant qu'on cherche à déterminer l'un quelconque des axes principaux en  $A$ . Si  $x_1$  est cet axe principal, nous aurons, pour cette valeur spéciale  $x_1$ ,

$$\square x_1 = kx_1,$$

c'est-à-dire, en vertu de la relation (44),

$$(45) \quad (\square_0 - k + \partial\mathfrak{R}.A^2)x_1 = \partial\mathfrak{R}.A\mathfrak{S}x_1.$$

Opérant par  $(\square_0 - k + \partial\mathfrak{R}.A^2)^{-1}$ ,

$$(46) \quad x_1 = \partial\mathfrak{R}.\mathfrak{S}x_1.(\square_0 - k + \partial\mathfrak{R}.A^2)^{-1}A.$$

Opérant maintenant par  $\mathfrak{S}.A \times \dots$ , il vient

$$(47) \quad \mathfrak{S}.A(\square_0 - k + \partial\mathfrak{R}.A^2)^{-1}A = \frac{1}{\partial\mathfrak{R}}.$$

Si nous considérons la surface du second degré

$$(48) \quad \mathfrak{S}.z(\square_0 - k + \partial\mathfrak{R}.A^2)^{-1}z = \frac{1}{\partial\mathfrak{R}},$$

nous voyons : 1° qu'elle est homofocale à l'ellipsoïde réciproque [\*] de l'ellipsoïde central ; 2° qu'elle passe par le point  $A$ , en vertu de la relation (47) ; 3° que sa normale en ce point a pour direction celle de  $(\square_0 - k + \partial\mathfrak{R}.A^2)^{-1}A$ .

---

[\*] Nous appelons ici *ellipsoïde réciproque* celui dont les axes, dirigés comme ceux de l'ellipsoïde central, ont des longueurs inverses de ces derniers.

Or cette direction dernière [formule (46)] est aussi celle de  $x_1$ , c'est-à-dire de l'un quelconque des axes principaux d'inertie en A. Donc :

*Les axes principaux d'inertie en tout point sont normaux aux trois surfaces du second degré qui passent par ce point et qui sont homofocales avec l'ellipsoïde réciproque de l'ellipsoïde central.*

Ce théorème remarquable est dû à Binet.

38. Il est facile, en employant la formule (44), de trouver la condition pour qu'un axe soit en tous ses points axe principal ; car  $\square x$  doit être parallèle à  $x$  pour les deux valeurs  $\lambda$  et  $\lambda + hx$ ,  $h$  étant réel : ce qui prouve qu'il en doit être de même de

$$(\lambda + hx) \mathfrak{S} \lambda + hx \cdot x - \lambda \mathfrak{S} \lambda x = hx^2 \lambda + hx \mathfrak{S} \lambda x + h^2 x^2 \cdot x.$$

Or, les deux derniers termes étant parallèles à  $x$ , il faut de même que l'on ait  $\lambda \parallel x$  ; en sorte que l'axe  $x$  doit passer par le centre de gravité. C'est donc un des axes principaux de l'ellipsoïde central.

La réciproque est pour ainsi dire évidente.

39. Pour qu'en un point A l'ellipsoïde d'inertie se réduise à une sphère, il faut que la fonction  $\square x = \square_0 x + \mathfrak{P} \lambda \mathfrak{U} \lambda x$  soit parallèle à  $x$  pour toute valeur de ce vecteur. Mais, si l'on fait  $x \parallel \lambda$ , cette fonction se réduit à  $\square_0 x \parallel \square_0 \lambda$  ; donc A doit être situé sur l'un des axes de l'ellipsoïde central. Soit  $x_1$  cet axe, et  $\square_0 x_1 = a_1 x_1$ ,  $a_1$  étant le moment d'inertie principal correspondant.

Alors

$$\square_0 x + \mathfrak{P} \lambda \mathfrak{U} \lambda x = a_1 x.$$

Si nous donnons maintenant à  $x$  successivement les directions  $x_2$  et  $x_3$  des deux autres axes de l'ellipsoïde central, répondant aux moments d'inertie  $a_2$  et  $a_3$ , il viendra

$$a_2 - a_1 + \mathfrak{P} \lambda^2 = 0, \quad a_3 - a_1 + \mathfrak{P} \lambda^2 = 0.$$

Donc

$$-\lambda^2 = \frac{a_2 - a_1}{\mathfrak{P} \lambda} = \frac{a_3 - a_1}{\mathfrak{P} \lambda},$$

ce qui montre qu'il faut  $a_2 = a_3$ , c'est-à-dire que l'ellipsoïde central soit de révolution, et en outre  $a_1 < a_2$ , de sorte que cet ellipsoïde doit être allongé.

---

TROISIÈME PARTIE : DYNAMIQUE.

*Équation générale de la Dynamique.*

40. Considérons un système matériel quelconque en mouvement. Soient  $M$  un point matériel quelconque de ce système,  $m$  la masse de ce point ;  $\mathfrak{M}$  son vecteur rapporté à une origine fixe ;  $F = m\mathfrak{X}$  la force qui agit sur le point en question ;  $t$  le temps compté à partir d'une origine fixe quelconque ; et enfin  $\delta\mathfrak{M}$  une variation élémentaire du vecteur de  $M$ , compatible avec les liaisons du système.

Si nous appliquons le principe de d'Alembert et que nous le combinions avec celui des vitesses virtuelles, écrit comme nous l'avons fait plus haut [n° 35, formule (31)], nous voyons que l'équation du mouvement du système matériel considéré peut s'écrire

$$(1) \quad \Sigma m \mathfrak{S} \cdot \left( \frac{d^2\mathfrak{M}}{dt^2} - \mathfrak{X} \right) \delta\mathfrak{M} = 0.$$

La sommation représentée par le signe  $\Sigma$  s'étend, bien entendu, à tous les points matériels du système. Si l'on suppose qu'il s'agisse de corps géométriques continus, ce signe sera équivalent à une intégrale triple ou à une addition d'intégrales triples.

L'équation (1) est ainsi l'équation la plus générale de la Dynamique, pour un système matériel quelconque. Si nous supposons maintenant que ce système se réduise à un corps libre, mais solide, le déplacement  $\delta\mathfrak{M}$  peut se décomposer, ainsi qu'on l'a vu au numéro 35, en une translation et une rotation, c'est-à-dire se mettre sous la forme  $\mathfrak{E} + \mathfrak{U}\mathfrak{M}$ . Alors, à cause de l'indétermination des deux vecteurs infiniment petits

F, x, l'équation (1) se décompose en les deux suivantes :

$$(2) \quad \Sigma m \left( \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} - \mathbf{J} \right) = 0,$$

$$(3) \quad \Sigma m \mathbf{U} \cdot \mathbf{M} \left( \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} - \mathbf{J} \right) = 0.$$

On remarquera l'analogie qu'elles présentent avec les équations statiques (13) et (14) du numéro 23.

En appelant c le vecteur du centre de gravité du système, l'équation (2) peut évidemment s'écrire

$$\frac{d^2 \mathbf{C}}{dt^2} \Sigma m = \Sigma \mathbf{F},$$

et elle nous donne par conséquent la loi du mouvement du centre de gravité.

Quant à la formule (3), il est aisé de voir, par rapprochement avec les considérations présentées au numéro 8, qu'elle renferme l'énoncé du principe des aires.

*Mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.*

41. Si le corps solide que nous venons de considérer en dernier lieu se meut autour d'un point fixe O, nous prendrons ce point pour origine, et nous éliminerons les réactions en ce point, en nous attachant exclusivement à l'équation (3).

Soit x un vecteur dirigé suivant l'axe instantané de rotation et dont le module  $\mathfrak{C}x$  représente la vitesse angulaire de la rotation à l'instant t, vecteur que, pour abrégier, nous appellerons *vecteur instantané de rotation*. On aura, en vertu des liaisons du système,

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{U} \mathbf{X} \mathbf{M};$$

d'où, par différentiation,

$$(5) \quad \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} = x \mathbf{U} \mathbf{X} \mathbf{M} - \mathbf{U} \mathbf{M} \frac{dx}{dt}.$$

Substituant dans l'équation (3), celle-ci devient donc

$$(6) \quad \Sigma m_M \mathfrak{U}_M \frac{dx}{dt} = \Sigma m (\mathfrak{U}_{XM} \mathfrak{S}_{XM} - \mathfrak{U}_{MX});$$

de là on tire encore

$$(7) \quad \Sigma m_M \frac{dm}{dt} - \Sigma m \mathfrak{V} f_{MX} / dt = c,$$

$c$  étant un vecteur constant. C'est évidemment une expression particulière du principe des aires.

De même, on obtient aussi

$$(8) \quad \frac{1}{2} \Sigma m \left( \frac{dm}{dt} \right)^2 - \Sigma m \mathfrak{S} f_{XM} dt = c,$$

formule qui répond au principe des forces vives, et dans laquelle  $c$  est une quantité réelle constante.

Supposons que les forces appliquées se fassent équilibre, ou, plus généralement, qu'elles se composent en une seule force passant au point fixe. Alors elles satisfont à la condition

$$\Sigma m \mathfrak{U}_{MX} = 0.$$

Les formules (6), (7), (8) se simplifient alors; et si nous introduisons la fonction linéaire et vectorielle

$$(9) \quad \square x = \Sigma m_M \mathfrak{U}_{MX} = x \Sigma m_M^2 - \Sigma m_M \mathfrak{S}_{MX}$$

et que nous remplaçons  $c$  par  $-\frac{h^2}{2}$ , ces formules deviendront respectivement

$$(10) \quad \square \frac{dx}{dt} + \mathfrak{U}_x \square x = 0,$$

$$(11) \quad \square x + c = 0,$$

$$(12) \quad \mathfrak{S} \cdot x \square x = h^2,$$



ce qui donne aussi

$$(13) \quad \mathfrak{S}xc + h^2 = 0,$$

et

$$(14) \quad \square \frac{dx}{dt} = \mathfrak{U}xc.$$

Il est facile d'interpréter les constantes  $c$  et  $h^2$ . La première représente la somme vectorielle des vitesses aréolaires de tous les éléments du corps, représentées comme on l'a vu en Cinématique et multipliées, chacune, par la masse de l'élément correspondant. Quant à  $h^2$ , c'est une quantité réelle, égale à la *force vive* du corps, c'est-à-dire à la somme des produits de la masse de chaque élément par le carré de la vitesse correspondante.

42. En considérant  $x$  comme un vecteur variable, l'équation (13) représente un ellipsoïde, invariable dans le corps en mouvement, mais mobile avec ce corps. L'équation (13) est celle d'un plan tangent à cet ellipsoïde, lequel plan tangent reste fixe dans l'espace, mais change généralement de position par rapport au corps. Et, comme le déplacement élémentaire du corps à chaque instant est une rotation autour de l'axe  $x$  passant par le point de contact, nous arrivons de la sorte à la représentation du mouvement qu'on doit à Poinso't, et qui consiste dans le roulement sans glissement d'un ellipsoïde mobile sur un plan fixe.

L'ellipsoïde (12) peut être appelé *ellipsoïde des forces vives*, et le plan fixe (13) sur lequel il roule est parallèle au plan invariable des aires dont l'équation est

$$\mathfrak{S}xc = 0.$$

La considération de l'ellipsoïde s'est introduite ici sans qu'il y ait été question en aucune manière de moments d'inertie. Mais, si nous nous reportons à ce qui a été exposé dans la deuxième Partie sur ce sujet, nous reconnaissons immédiatement l'identité de la formule (9) ci-dessus avec la formule (33) du n° 54. Ainsi la fonction  $\square$  employée ici est exactement la même que précédemment, et le moment d'inertie est

(n° 54, formule (34) ]

$$(15) \quad -\mathfrak{S} x^{-1} \square x = \frac{h^2}{\mathfrak{E} x^3};$$

ce qui nous montre que le carré d'un demi-diamètre quelconque de l'ellipsoïde est égal en grandeur à la force vive divisée par le moment d'inertie correspondant à ce demi-diamètre.

Les équations (11) et (12) nous donnent immédiatement

$$(16) \quad c^2 \mathfrak{S} x \square x - h^2 (\square x)^2 = 0,$$

ce qui, en posant

$$(17) \quad y = c^2 \square x - h^2 \square^2 x,$$

donne

$$(18) \quad \mathfrak{S} xy = 0.$$

Cette équation (16) représente un cône du second ordre, lieu des positions des axes instantanés  $x$  considérés comme liés avec le corps; le long de la génératrice  $x$ , la normale  $a$ , d'après la relation (18), la direction de  $y$ . Or il est facile de reconnaître, par la formule (10), qu'on a

$$\mathfrak{S} x \square \frac{dx}{dt} = 0, \quad \text{et} \quad \mathfrak{S} \square x \square \frac{dx}{dt} = 0,$$

ce qui montre, en raison des propriétés connues de la fonction  $\square$ , que  $\frac{dx}{dt}$  est perpendiculaire à  $\square x$  et  $\square^2 x$ , et par suite [relation (17)] à  $y$ . Ainsi le cône (16) est *touché* le long de la génératrice  $x$  par l'autre cône, que forment les axes instantanés dans l'espace; et le mouvement peut ainsi se représenter encore par le roulement du premier de ces deux cônes sur le second. Cette représentation a été indiquée également par Poincot.

Le point  $C$  est fixe dans l'espace, mais mobile dans le corps. Si nous cherchons le lieu du vecteur  $c$  dans le corps, nous trouvons, au moyen des formules (16) et (11),

$$(19) \quad c^2 \mathfrak{S} c \square^{-1} c + h^2 c^2 = 0,$$

en posant

$$(20) \quad c = \mathfrak{C}c \quad [*],$$

d'où

$$(21) \quad c^2 + c^2 = 0.$$

Le lieu décrit par le point C, extrémité de c, est donc donné par l'intersection de la sphère (21) et du cône (19), laquelle intersection appartient aussi à l'ellipsoïde réciproque

$$(22) \quad \mathfrak{S}c\Box^{-1}c = h^2.$$

La normale au cône (19) en tout point de la génératrice c a la direction de  $c^2\Box^{-1}c + h^2c$ , c'est-à-dire, en vertu de la formule (11), celle de  $x + h^2c^{-1}$ . Menons par l'origine une parallèle z à cette normale. Cette parallèle, en vertu de la formule (13), satisfera à l'équation  $\mathfrak{S}zc = 0$ , c'est-à-dire qu'elle appartiendra au plan invariable. Donc le cône normal au cône (19) roule sur ce plan invariable, z représentant la génératrice de contact.

45. Cherchons à quelle condition le corps peut tourner constamment autour du même axe, avec une vitesse constante. Il faut pour cela qu'on ait

$$(23) \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

ou [formule (10)]

$$\mathfrak{U}x\Box x = 0.$$

La direction permanente de l'axe doit donc être celle de l'un des axes de figure de l'ellipsoïde (12) ou de son réciproque (22), c'est-à-dire celle de l'un des axes principaux d'inertie (n° 56).

[\*] Il est à peine utile de remarquer que ce c n'est plus le même que celui qui a été employé au n° 41.

De plus, la condition (23) exige la suivante :

$$\square^{-1} \mathbf{o} = \mathbf{o},$$

comme il est aisé de le voir; et, pour s'assurer que cette dernière est effectivement remplie, il suffit de transformer la formule (40) du n° 36, en l'écrivant ainsi :

$$-a_1 a_2 a_3 \square^{-1} = \square^2 + (a_1 + a_2 + a_3) \square + a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2.$$

Par conséquent, si le corps commence à tourner, à un instant quelconque, autour d'un de ses axes principaux d'inertie, il continuera à tourner autour du même axe avec une vitesse de rotation invariable.

La représentation du mouvement par le roulement d'un ellipsoïde sur un plan aurait évidemment conduit à ce résultat par des considérations purement géométriques.

On voit, en particulier, que cette circonstance se présentera pour un axe instantané quelconque si l'ellipsoïde se réduit à une sphère.

*Mouvement d'un système de points matériels libres s'attirant réciproquement en raison inverse des carrés de leurs distances.*

44. Avant d'écrire l'équation générale du mouvement, en partant de l'équation (1) du n° 40, supposons simplement deux points M, M', de masses  $m, m'$ , et déterminés par les vecteurs  $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'$ . Nous aurons alors

$$J = \frac{m'}{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}}, \quad J' = \frac{m}{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}},$$

si

$$r = \mathfrak{E}(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'),$$

donc

$$24) \quad m \mathfrak{S}.J \partial \mathfrak{M} + m' \mathfrak{S}.J' \partial \mathfrak{M}' = \frac{mm'}{r} \mathfrak{S} \frac{\partial |\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'|}{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'} = \frac{mm' \partial r}{r^2} = - \partial \frac{mm}{r},$$

si bien que dans ce cas particulier l'équation (1) peut s'écrire

$$m \mathfrak{S} \frac{d^2 \mathfrak{M}}{dt^2} \partial \mathfrak{M} + m' \mathfrak{S} \frac{d^2 \mathfrak{M}'}{dt^2} \partial \mathfrak{M}' + \partial \frac{mm'}{r} = \mathbf{o}.$$

Mais il est aisé d'étendre la formule (24) à un nombre quelconque de points,  $m, m', m'', \dots$  et d'établir ainsi que l'on a

$$\sum m \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{J} \delta \mathbf{M} = - \partial \sum \frac{mm'}{\mathfrak{C}(\mathbf{M} - \mathbf{M}')} = - \delta \mathbf{P},$$

si nous désignons par  $\mathbf{P}$  le *potentiel* du système

$$\sum \frac{mm'}{\mathfrak{C}(\mathbf{M} - \mathbf{M}')} = \mathbf{P};$$

par conséquent, l'équation générale de la Dynamique devient dans ce cas

$$(25) \quad \sum m \mathfrak{S} \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} \delta \mathbf{M} + \delta \mathbf{P} = 0.$$

D'une manière générale, si une quantité réelle quelconque  $f$  est fonction, comme  $\mathbf{P}$  ci-dessus, de plusieurs vecteurs  $\mathbf{M}, \mathbf{M}', \mathbf{M}'', \dots$ , sa variation, lorsque ces vecteurs varieront eux-mêmes, pourra se mettre sous la forme

$$(26) \quad \delta f = \mathfrak{S} \kappa \delta \mathbf{M} + \mathfrak{S} \kappa' \delta \mathbf{M}' + \dots = \sum \mathfrak{S} \kappa \delta \mathbf{M},$$

$\kappa, \kappa', \dots$  étant eux-mêmes de nouveaux vecteurs, qu'il est avantageux de désigner par convention sous le nom de *dérivées de  $f$*  par rapport à  $\mathbf{M}, \mathbf{M}', \dots$ , et de représenter par les symboles

$$\kappa = \mathfrak{D}_{\mathbf{M}} f, \quad \kappa' = \mathfrak{D}_{\mathbf{M}'} f, \quad \dots$$

D'après cette notation nous aurons

$$(27) \quad \delta \mathbf{P} = \sum \mathfrak{S} \mathfrak{D}_{\mathbf{M}} \mathbf{P} \delta \mathbf{M}.$$

Alors, en vertu de l'équation (25), les équations particulières du mouvement de chacun des points  $\mathbf{M}, \mathbf{M}', \dots$  pourront s'écrire

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 \mathbf{M}}{dt^2} + \mathfrak{D}_{\mathbf{M}} \mathbf{P} = 0, \\ m' \frac{d^2 \mathbf{M}'}{dt^2} + \mathfrak{D}_{\mathbf{M}'} \mathbf{P} = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

ou encore, en développant,

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{m'}{M - m'} \mathfrak{C} \frac{dM}{dt} + \frac{m''}{M - m''} \mathfrak{C} \frac{dM}{dt} + \dots, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Si nous reprenons l'équation (25) et que nous y faisons successivement  $\delta M$  égal: 1° à une translation infiniment petite, commune à tous les points du système; 2° à une rotation infiniment petite autour d'un axe fixe; 3° au déplacement effectif  $dM$  du point considéré, il est aisé de voir qu'on tombe sur trois équations immédiatement intégrables, et dont les intégrales sont

$$(30) \quad \Sigma m \frac{dM}{dt} = B,$$

$$(31) \quad \Sigma m \mathfrak{U} M \frac{dM}{dt} = C,$$

$$(32) \quad T = -\frac{1}{2} \Sigma m \left( \frac{dM}{dt} \right)^2 = P + H,$$

$B, C$  étant ici des vecteurs constants,  $H$  une constante réelle, et  $T$  représentant la demi-force vive du système.

Ces équations répondent respectivement à la loi du mouvement du centre de gravité, à celle de la description des aires et à celle de la force vive.

Cette formule (25) peut d'ailleurs être intégrée, tout en laissant à la variation  $\delta M$  sa généralité, en employant la transformation suivante :

$$(33) \quad \mathfrak{R} \frac{d^2 M}{dt^2} \delta M = \frac{d}{dt} \left( \frac{dM}{dt} \delta M \right) - \frac{1}{2} \delta \left( \frac{dM}{dt} \right)^2.$$

Si maintenant nous introduisons l'intégrale définie

$$(34) \quad F = \int_0^t (P + T) dt,$$

nous voyons que l'équation (25) nous donnera l'intégrale

$$(35) \quad \Sigma m \mathfrak{R} \left[ \frac{dM}{dt} \delta M - \left( \frac{dM}{dt} \right)_0 \delta M_0 \right] + \delta F = 0,$$

en désignant par l'indice zéro les valeurs initiales des vecteurs représentant les *positions* des points M, ou leurs *vitesse*s.

On remarquera l'analogie qu'offre cette méthode avec l'intégration par parties.

45. Cette équation (35) conduit à des conséquences importantes. Pour en obtenir quelques-unes, remarquons que, les masses  $m, m', \dots$  étant constantes, les intégrales complètes des équations (28) ou (29) nous donneraient les *positions* et les *vitesse*s actuelles en fonction des *positions* et des *vitesse*s initiales, ainsi que du temps  $t$ . Réciproquement nous pouvons concevoir les *vitesse*s initiales comme fonctions des *positions* initiales et finales, ainsi que du temps. De cette manière, nous sommes conduit à considérer P, T, et par suite F, comme des fonctions réelles (exprimées ou non) de  $M, M', \dots, M_0, M'_0, \dots$  et de  $t$ . D'après cela, et en vertu de la remarque exprimée par la formule (26), l'équation (35) se décompose dans les deux systèmes suivants :

$$(36) \quad m \frac{dm}{dt} + \mathcal{O}_M F = 0, \quad m' \frac{dm'}{dt} + \mathcal{O}_{M'} F = 0, \dots,$$

$$(37) \quad -m \left( \frac{dm}{dt} \right)_0 - \mathcal{O}_{M_0} F = 0, \quad m' \left( \frac{dm'}{dt} \right)_0 + \mathcal{O}_{M'_0} F = 0, \dots$$

Le système (36) peut être appelé l'intégrale *intermédiaire*, et le système (37) l'intégrale *définitive* des équations différentielles du mouvement, impliquées dans la formule (25). On remarquera, en effet, que le système (37) ne renferme que les vitesses initiales, et qu'il exprime, au moins théoriquement, la dépendance entre les *positions* actuelles, les *positions* et les *vitesse*s initiales, et le temps. La fonction F joue ainsi un rôle très-important dans cette théorie. C'est elle que Hamilton a désignée sous le nom de *fonction principale* du mouvement. Après avoir exposé sa méthode dans deux Mémoires publiés dans les *Transactions philosophiques* (1834-1835) sous la forme de coordonnées ordinaires, il lui a plus tard appliqué l'algorithme des quaternions, qui s'y adapte si bien.

46. Si l'on donne les positions et les vitesses initiales, on peut dire que la fonction F dépend uniquement du temps, et alors, en vertu de

l'équation (34), qui définit cette fonction, sa vitesse d'accroissement, ou sa *dérivée totale*, est

$$(38) \quad (\partial_t F) = P + T.$$

Mais la fonction  $F$  peut être considérée comme renfermant les vecteurs des positions initiales et finales, vecteurs qui contiennent aussi le temps explicitement. Nous pouvons, par suite, nous proposer de déterminer la *dérivée partielle*  $(\partial_M F)$  par rapport au temps seulement, comme si les vecteurs des positions finales  $M, M', \dots$  étaient constants, au lieu de changer avec le temps, comme cela a lieu effectivement dans le mouvement du système.

Dans ce but, il nous suffira de remarquer que la dérivée totale (38) se compose de deux parties : celle que nous cherchons et celle qui résulte du changement des vecteurs  $M, M', \dots$ . Or cette dernière [formule (26)] a pour expression

$$\sum \mathfrak{S} \left( (\partial_M F) \frac{dM}{dt} \right),$$

c'est-à-dire, en vertu des relations (36) et (32),

$$(39) \quad - \sum m \left( \frac{dM}{dt} \right)^2 = 2T.$$

La dérivée partielle cherchée est donc

$$(40) \quad (\partial_t F) = (\partial_t F) - 2T = P - T = -H;$$

par conséquent, la *variation totale* de la fonction  $F$ , si  $t$  est considéré comme variable aussi bien que  $M, M', \dots$  et  $M_0, M'_0, \dots$ , est, d'après la relation (35),

$$(41) \quad \delta F = -H \delta t - \sum m \mathfrak{S} \frac{dM}{dt} \delta M + \sum m \mathfrak{S} \left( \frac{dM}{dt} \right)_0 \delta M_0.$$

Enfin,  $P_0$  indiquant la valeur initiale du potentiel, on conclut de ce qui précède et des relations (32), (36), (37), que la fonction principale  $F$  doit satisfaire aux deux équations aux différentielles partielles

$$(42) \quad (\partial_t F) - \frac{1}{2} \sum m^{-1} (\partial_M F)^2 = P,$$

$$(43) \quad (\partial_t F) - \frac{1}{2} \sum m^{-1} (\partial_{M_0} F)^2 = P_0.$$



47. Considérons maintenant l'intégrale

$$(44) \quad V = \int_0^t \mathcal{L} T dt.$$

Elle représente la *force vive accumulée*, ou, suivant l'expression d'Hamilton, l'*action* du système. C'est la même qui figure dans le principe de Mécanique dit *de la moindre action*. Dans les Mémoires déjà cités, comme dans ses *Éléments des quaternions*, Hamilton donne à cette fonction V le nom de *fonction caractéristique*, que nous adopterons ici.

D'après les équations (32) et (34), les deux intégrales F et V sont liées entre elles par la relation

$$(45) \quad V = F + tH;$$

donc la *variation totale* de V sera, en la considérant comme fonction du temps et des positions initiales et finales,

$$\delta V = H \delta t + t \delta H + \delta F,$$

ou, en vertu de l'équation (41),

$$(46) \quad \delta V = t \delta H - \sum m \mathfrak{S} \frac{dx}{dt} \delta x + \sum m \mathfrak{S} \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 \delta x_0,$$

et ses dérivées partielles sont respectivement

$$(47) \quad \partial_x V = -m \frac{dx}{dt}, \quad \partial_{x'} V = \dots,$$

$$(48) \quad \partial_{x_0} V = +m \left( \frac{dx}{dt} \right)_0, \quad \partial_{x'_0} V = \dots,$$

$$(49) \quad \partial_t V = t.$$

Les intégrales intermédiaires du mouvement du système, qui étaient d'abord exprimées par les équations (36), peuvent maintenant être considérées comme résultant de l'élimination de H entre les formules (47) et (49), et les intégrales définitives [équations (37)] peuvent être regardées aussi comme résultant de l'élimination de la même constante H entre les équations (48) et (49).

La comparaison entre les équations (36) et (47), (37) et (48), respectivement, nous montre que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_M V &= \mathcal{O}_M F, & \mathcal{O}_{M'} V &= \mathcal{O}_{M'} F, & \dots, \\ \mathcal{O}_{M_0} V &= \mathcal{O}_{M_0} F, & \mathcal{O}_{M'_0} V &= \mathcal{O}_{M'_0} F, & \dots; \end{aligned}$$

par conséquent, et d'après la formule (40), on voit que les équations (42) et (43) nous conduisent aux deux suivantes :

$$(50) \quad \frac{1}{2} \Sigma m^{-1} (\mathcal{O}_M V)^2 + P + H = 0,$$

$$(51) \quad \frac{1}{2} \Sigma m^{-1} (\mathcal{O}_{M_0} V)^2 + P_0 + H = 0.$$

Telles sont les deux équations aux différentielles partielles auxquelles la fonction caractéristique  $V$  doit satisfaire.

Cette fonction s'évanouit, comme  $F$ , pour  $t = 0$ , instant auquel  $M = M_0, M' = M'_0, \dots$ . Chacune de ces deux fonctions  $F$  et  $V$  contient symétriquement les vecteurs des positions initiales et finales. Il en doit être ainsi pour chacune d'elles, puisqu'elle dépend de la configuration mutuelle de toutes ces positions initiales et finales.

En combinant les équations (30) et (31), respectivement, avec les formules (36) et (37), on a encore les deux relations

$$(52) \quad \Sigma (\mathcal{O}_M F + \mathcal{O}_{M_0} F) = 0,$$

$$(53) \quad \Sigma \mathfrak{B} (M \mathcal{O}_M F + M_0 \mathcal{O}_{M_0} F) = 0.$$

et de même, pour la fonction caractéristique,

$$(54) \quad \Sigma (\mathcal{O}_M V + \mathcal{O}_{M_0} V) = 0,$$

$$(55) \quad \Sigma \mathfrak{B} (M \mathcal{O}_M V + M_0 \mathcal{O}_{M_0} V) = 0.$$

Les relations (52) et (54) répondent à la loi du mouvement du centre de gravité, et les relations (53) et (55) à la loi de description des aires.

Lorsque  $t$  a une valeur très-faible, c'est-à-dire pour un mouvement de petite durée, on satisfait à toutes les conditions qui précèdent au

moyen des valeurs *approchées* suivantes pour les fonctions F et V :

$$(56) \quad F = \frac{t}{2}(P + P_0) + \frac{s^2}{2t},$$

$$(57) \quad V = s(P + P_0 + 2H)^{\frac{1}{2}},$$

$s$  étant une constante réelle et positive, définie par l'équation

$$s^2 = -\Sigma m \cdot M - M_0)^2,$$

d'où

$$(58) \quad s = \sqrt{\Sigma m \cdot M - M_0)^2}.$$

On reconnaît que les conditions requises sont satisfaites en assimilant  $M - M_0$  à  $t \frac{ds}{dt}$ .

Quant aux expressions de H et de  $t$ , on les déduit des formules (56) et (57) comme il suit :

$$(59) \quad H = -(\mathcal{O}_t F) = -\frac{1}{2}(P + P_0) + \frac{s^2}{2t^2},$$

$$(60) \quad t = (\mathcal{O}_H V = s(P + P_0 + 2H)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ces deux valeurs de H et de  $t$  se déduisent évidemment l'une de l'autre.

48. Les diverses propriétés de la fonction principale et de la fonction caractéristique, que nous avons établies ici, d'après Hamilton, pour le cas particulier de l'attraction planétaire, ne sont pas spéciales à cet exemple. Elles s'étendent à tous ceux dans lesquels il existe un potentiel, ou fonction des forces, tel que P, dont la variation  $\partial P$  représente le travail virtuel. Il est à remarquer que la fonction caractéristique V présente sur la fonction principale F l'avantage de ne pas contenir le temps explicitement. Cela résulte immédiatement des formules (40) et (45).

Ces fonctions satisfont, chacune, à deux équations aux différentielles

partielles, que nous rappelons ici, et qui sont, pour la fonction  $F$ ,

$$(42) \quad (\mathcal{O}_t F) - \frac{1}{2} \Sigma m^{-1} (\mathcal{O}_M F)^2 = P,$$

$$(43) \quad (\mathcal{O}_t F) - \frac{1}{2} \Sigma m^{-1} (\mathcal{O}_{M_0} F)^2 = P_0,$$

et pour la fonction  $V$ ,

$$(50) \quad \frac{1}{2} \Sigma m^{-1} (\mathcal{O}_M V)^2 + P + H = 0,$$

$$(51) \quad \frac{1}{2} \Sigma m^{-1} (\mathcal{O}_{M_0} V)^2 + P_0 + H = 0.$$

Hamilton avait considéré ces couples d'équations comme nécessaires à la détermination de ces fonctions  $F$  et  $V$  respectivement; mais Jacobi a donné une remarquable extension à cette théorie, en démontrant qu'une seule, et non pas nécessairement deux équations aux différentielles partielles, pouvait suffire à la détermination, soit de la fonction  $F$ , soit de la fonction  $V$ , sous une forme plus générale, il est vrai, que la forme examinée par Hamilton. Nous allons indiquer ici l'analyse de Jacobi, en y adaptant la méthode des quaternions, pour ce qui concerne la fonction caractéristique. Celle qui se rapporte à la fonction principale est tout à fait analogue.

**THÉORÈME.** — Soit  $V$  une solution complète de l'équation aux différentielles partielles (50), laquelle solution renferme, outre les vecteurs  $M, M', \dots$ , un égal nombre de vecteurs constants arbitraires  $\lambda, \lambda', \dots$ . Cette solution contient aussi la constante réelle  $H$  et une constante arbitraire combinée par addition. Soit, de plus,  $P$  une fonction quelconque des vecteurs  $M, M', \dots$ , pouvant contenir le temps explicitement, auquel cas on remplacerait  $t$  par  $\mathcal{O}_H V$  [formule (49)] dans l'équation aux différentielles partielles.

Les intégrales des équations différentielles du mouvement (28) s'obtiendront par l'élimination de  $H$  entre les équations

$$(61) \quad \mathcal{O}_\lambda V = B, \quad \mathcal{O}_{\lambda'} V = B', \quad \dots,$$

$$(49) \quad \mathcal{O}_H V = t,$$

$B, B', \dots$  étant de nouveaux vecteurs arbitraires.

Pour établir ce théorème, différencions successivement l'équation

(50) par rapport aux vecteurs  $\lambda, \lambda', \dots$  et à la constante réelle  $H$ . (À cet effet, comme dans toutes les différentiations qui vont suivre, nous désignerons par des  $\partial$  accompagnés d'indices les variations des diverses fonctions considérées. Ainsi  $\partial_\lambda V$ , par exemple, représente l'accroissement que prend  $V$  lorsqu'on y fait varier  $\lambda$  seulement.) Nous aurons

$$(62) \quad \Sigma m^{-1} \mathfrak{S}(\omega_M V) \cdot \partial_\lambda(\omega_M V) + (\omega_t P) \cdot \partial_\lambda(\omega_H V) = 0, \quad \square \dots,$$

$$(63) \quad \Sigma m^{-1} \mathfrak{S}(\omega_M V) \cdot \partial_H(\omega_M V) + (\omega_t P) \cdot \partial_H(\omega_H V) + 1 = 0.$$

Différentions maintenant les équations (61) et (49) par rapport à  $t$ . Il viendra

$$(64) \quad \Sigma \mathfrak{S} \frac{dM}{dt} \cdot (\omega_M \partial_\lambda V) + (\omega_t H) \cdot (\omega_H \partial_\lambda V) = 0, \dots,$$

$$(65) \quad \Sigma \mathfrak{S} \frac{dM}{dt} \cdot (\omega_H \partial_H V) + (\omega_t H) \cdot (\omega_H \partial_H V) - 1 = 0.$$

Si l'on compare ces deux systèmes d'équations, en ayant égard, de même que dans les différentiations, à la définition des dérivées résultant de la formule (26), on obtient

$$(47) \quad (\omega_M V) = -m \frac{dM}{dt}, \quad \dots,$$

$$(66) \quad (\omega_t P) = -(\omega_t H).$$

Actuellement, différencions l'équation (47) par rapport à  $t$ . Nous obtiendrons

$$(67) \quad \Sigma \mathfrak{S}(\omega_M V) \cdot \partial_M(\omega_M V) = \Sigma m^2 \mathfrak{S} \frac{dM}{dt} \cdot \frac{d'M}{dt^2} dt, \quad \dots$$

Enfin, la différentiation de l'équation (50) par rapport à  $M, M', \dots$  nous donne

$$\Sigma m^{-1} \mathfrak{S}(\omega_M V) \cdot \partial_M(\omega_M V) + \Sigma \partial_M P = 0,$$

c'est-à-dire

$$(68) \quad \Sigma \mathfrak{S}(\omega_M V) \cdot \partial_M(\omega_M V) = -\Sigma m \mathfrak{S}(\omega_M P) \cdot \frac{dM}{dt} dt;$$

et la comparaison des équations (67) et (68) montre qu'on a

$$(28) \quad (\omega_M P) = -m \frac{d^2 M}{dt^2}, \quad \dots,$$

c'est-à-dire les équations différentielles du mouvement. Ces dernières, étant ainsi vérifiées identiquement, ont donc bien pour intégrales générales les équations (61) et (49).

On remarquera toute l'analogie que présente le système (61), (49) avec le système (48), (49), qui n'est qu'un cas particulier du premier, comme nous allons le reconnaître.

D'après les relations (47), on voit que l'équation aux différentielles partielles (50) nous donne

$$(32) \quad \frac{1}{2} \Sigma m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + P + H = 0.$$

Si donc P ne contient pas le temps, c'est-à-dire si H est une constante, ce sera la constante des forces vives. Dans ce cas, la valeur de  $dV$  deviendra

$$dV = \Sigma \mathfrak{S}_{\mathfrak{O}_m} V. dx,$$

ou, d'après (47),

$$(69) \quad dV = - \Sigma m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt = 2T dt;$$

d'où

$$(70) \quad V = \int 2T dt + \text{const.},$$

conformément à la formule (44) qui nous avait d'abord servi à définir la fonction V dans la théorie d'Hamilton.

En choisissant enfin pour vecteurs constants  $\Lambda, \Lambda', \dots$  les vecteurs des positions initiales  $m_0, m'_0, \dots$ , et déterminant la constante H de manière que V s'annule pour  $t = 0$ , on retomberait exactement sur la définition donnée par la formule (44), et sur le système (48), (49), pour les intégrales du mouvement. La fonction caractéristique V satisfait alors, comme nous l'avons vu, à l'équation différentielle 51 en même temps qu'à l'équation (50).

*Mouvement d'un point matériel libre sollicité par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance.*

49. Lorsque deux points matériels libres, ayant pour vecteurs  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{M}'$ , et pour masses  $m$  et  $m'$ , s'attirent réciproquement en raison inverse du carré de leur distance, la formule (29) du n° 44 nous montre que le mouvement *relatif* du premier point autour du second a pour équation

$$(71) \quad \frac{d^2(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}')}{dt^2} = (m + m')(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}')^{-1}r^{-3},$$

en posant

$$r = \mathfrak{C}(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}').$$

Si nous remplaçons  $m + m'$  par  $m$  (somme des masses) et  $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}'$  par  $\mathfrak{M}$  (vecteur du premier point relativement au second), cette équation prend la forme

$$(72) \quad \frac{d^2\mathfrak{M}}{dt^2} = m\mathfrak{M}^{-1}r^{-3}.$$

Opérant sur cette formule par  $\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{M} \times$ , nous avons

$$\mathfrak{U} \cdot \mathfrak{M} \frac{d^2\mathfrak{M}}{dt^2} = 0;$$

d'où, par intégration,

$$(73) \quad \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{M} \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = c,$$

$c$  étant un vecteur constant

Ce premier résultat montre à la fois que la trajectoire est plane et que l'aire décrite par le vecteur  $\mathfrak{M}$  est proportionnelle au temps. Le vecteur  $c$  est normal au plan de la trajectoire, et  $\mathfrak{C}c$  mesure la double vitesse aréolaire, comme nous l'avons vu en Cinématique (n° 8). Ces conclusions sont évidemment les mêmes si  $r^{-3}$  est remplacé par une fonction quelconque de  $r$ , c'est-à-dire pour tout mouvement dû à une force centrale, quelle qu'en soit la loi.

Une transformation pour ainsi dire identique à celle que nous

avons pratiquée au n° 11 nous montre qu'on peut écrire l'équation (72) sous la forme

$$(74) \quad \frac{d^2 M}{dt^2} = \frac{dM}{dt} B,$$

la valeur du vecteur constant  $B$  étant

$$(75) \quad B = m c^{-1}.$$

L'équation (74), immédiatement intégrable, donne

$$\frac{dM}{dt} = (M - E) B,$$

ou

$$(76) \quad \frac{dM}{dt} = B(E - M),$$

$E$  étant un vecteur constant arbitraire, assujéti seulement à se trouver dans le plan de la trajectoire.

Cette équation (76) peut évidemment être considérée comme étant celle de l'*hodographe* du mouvement, et elle nous montre immédiatement que l'*hodographe* est une circonférence dont le centre a pour vecteur  $BE$  et dont le rayon  $h$  est égal à  $\mathfrak{C}B$ . Ce rayon, d'après les formules (73) et (75), est donc égal au quotient de la masse  $m$  par la double vitesse aréolaire  $\mathfrak{C}c = c$ .

En posant pareillement  $\mathfrak{C}E = e$ , cette quantité réelle mesure l'*excentricité* de l'*hodographe* par rapport au centre des forces; et par exemple, suivant que  $e$  est plus petit que 1, égal à 1, ou plus grand que 1, le centre des forces sera intérieur à l'*hodographe*, situé sur cette circonférence, ou extérieur.

Nous retrouvons donc, et par la même analyse, les propriétés de l'*hodographe circulaire* indiquées déjà au n° 11, et qui sont ainsi des conséquences mathématiques de la loi de l'attraction planétaire. Nous avons d'ailleurs démontré au n° 12 que réciproquement, parmi tous les mouvements dus à des forces centrales, celui qui correspond à une force inversement proportionnelle au carré de la distance présente seul la propriété de l'*hodographe circulaire*.



50. L'équation (76) donne

$$\mathbf{E} - \mathbf{U}_M = \mathbf{B}^{-1} \frac{d\mathbf{M}}{dt} = m^{-1} \mathbf{C} \frac{d\mathbf{M}}{dt}.$$

Opérant par  $\mathfrak{S}.M \times$ , il vient

$$(77) \quad \mathfrak{S}.ME + r = m^{-1} \mathfrak{S}.C \frac{d\mathbf{M}}{dt} M = -m^{-1} c^2 = m^{-1} c^2,$$

de sorte que, si nous posons

$$(78) \quad \mathfrak{S}.U_{ME} = \cos \nu,$$

$$(79) \quad m^{-1}.c^2 = p,$$

nous obtenons pour équation de la trajectoire

$$(80) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}.$$

Cette trajectoire ou *orbite* est donc une conique, puisque, d'après les relations (78) et (79),  $\nu$  mesure l'angle d'inclinaison de  $M$  sur  $E$ , tandis que  $p$  est une constante réelle. Cette constante ou demi-paramètre s'obtient en divisant par la masse le carré de la double vitesse aréolaire, qui peut conséquemment s'écrire  $(mp)^{\frac{1}{2}}$ .

L'un des foyers de la conique est au centre des forces, et l'excentricité a pour valeur  $e$ .

En désignant comme plus haut par  $h$  le rayon de l'hodographe, il est facile de voir enfin qu'on a

$$c = ph, \quad h^2 = \frac{m}{p}.$$

Si nous avons opéré directement par  $\mathfrak{S}.M \times$  sur l'équation (76), nous aurions obtenu

$$\mathfrak{S}.M \frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathfrak{S}.BEM,$$

c'est-à-dire

$$r \frac{dr}{dt} = B U_{ME};$$

d'où

$$r^2 \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = B^2 (U_{ME})^2 = h^2 r^2 e^2 \sin^2 \nu.$$

Remplaçant  $\sin^2 \nu$  par sa valeur tirée de l'équation (80), et posant

$$a = \frac{p}{1 - e^2},$$

cette relation devient

$$(81) \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = m \left(\frac{2}{r} - \frac{p}{r^2} - \frac{1}{a}\right).$$

Elle montre ainsi comment la distance  $r$  du centre des forces varie avec le temps.

Désignons par une seule lettre  $H$  le vecteur  $BE$  du centre de l'hodographe. Alors nous aurons

$$\mathfrak{C}_H = \mathfrak{C}_B \mathfrak{C}_E = he.$$

D'après cela, et en vertu des propriétés les plus élémentaires de la circonférence, le produit de deux vitesses opposées quelconques sur l'orbite sera constant et aura pour expression

$$(82) \quad h^2(1 - e^2) = \frac{m}{a} = H^2 - B^2.$$

Ce cas de deux vitesses opposées ne se présente, à proprement parler, que pour une orbite elliptique, c'est-à-dire pour  $e < 1$ ; mais il n'y a nulle difficulté à interpréter le résultat dans le cas d'une hyperbole.

Si l'on donne le vecteur  $\mathfrak{N} = \frac{d\mathfrak{M}}{dt}$  d'un point de l'hodographe, le vecteur  $\mathfrak{M}$  correspondant de l'orbite s'obtiendra [formules (73), (76)] au moyen des deux équations

$$(83) \quad \mathfrak{U}_{MN} = c = mB^{-1},$$

$$(84) \quad \mathfrak{M} = rB^{-1}(H - \mathfrak{N}).$$

On tire de là pour le *potentiel* correspondant

$$(85) \quad P = \frac{m}{r} = \mathfrak{S}_N(H - \mathfrak{N}) = \mathfrak{S}_K(\Pi - \mathfrak{N}),$$

$\kappa$  étant le vecteur d'un point quelconque de la tangente à l'hodographe en  $N$ .

L'expression  $\mathfrak{S}_N(\pi - \kappa)$  nous montre que le potentiel est égal à la puissance du point N de l'hodographe par rapport au cercle de diamètre OH, qu'on peut appeler avec Hamilton *cercle d'excentricité*.

La seconde expression répond au produit de la longueur OK par celle de la projection de HN sur OK. Si nous considérons le second point de contact N', et que nous nommions L la projection de H sur OK, il est aisé de voir que les potentiels correspondants P, P' seront proportionnels aux longueurs LN, LN'. Ces dernières droites sont d'ailleurs également inclinées sur OK.

Enfin on reconnaît que OK est parallèle à la corde MM' de l'orbite, correspondant à NN'.

De ces diverses expressions il est possible de déduire de nombreuses conséquences géométriques, dans le détail desquelles nous n'entrerons pas ici. Nous nous contenterons de signaler les deux théorèmes suivants, qu'Hamilton démontre dans ses *Éléments*, par les considérations dont nous parlons.

THÉORÈME D'ISOCRONISME HODOGRAPHIQUE. — *Si deux hodographes circulaires, ayant une corde commune qui passe par le centre des forces ou tend vers ce centre, sont coupés orthogonalement par un troisième cercle, les temps de description hodographique des arcs interceptés seront égaux.*

THÉORÈME DE LAMBERT. — *Soient MM' un arc de l'orbite; r et r' les longueurs OM, OM'; s la longueur de la corde MM'; a le demi-axe focal de l'orbite, comme plus haut. Le temps employé à décrire l'arc MM' est une fonction des trois rapports  $\frac{a^2}{m}$ ,  $\frac{r \cdot r'}{a}$ ,  $\frac{s}{r+r}$ .*

§1. Il est facile de voir que l'équation différentielle (72) du mouvement relatif que nous étudions peut se mettre sous la forme

$$(86) \quad \mathfrak{S} \frac{d^2 M}{dt^2} + \partial P = 0,$$

analogue à l'équation (25) du n° 44, le potentiel P étant ici égal à  $\frac{m}{r}$ , comme dans le numéro précédent.

De là

$$(87) \quad T = P + H,$$

si nous posons

$$(88) \quad T = -\frac{1}{2} \left( \frac{dN}{dt} \right)^2 = -\frac{1}{2} N^2,$$

$$(89) \quad H = -\frac{m}{2a};$$

car, en vertu des formules (85), (82), on a

$$T - P = -\frac{1}{2}[N^2 + \mathfrak{S}^2 N^2 (n - N)] = -\frac{1}{2}[n^2 - (n - N)^2] = -\frac{t}{2}(n^2 - n^2) = -\frac{m}{2a}.$$

Introduisons, comme aux n<sup>os</sup> 44 et suivants, les deux intégrales

$$(90) \quad F = \int_0^t (P + T) dt,$$

$$(91) \quad V = \int_0^t 2 T dt,$$

que nous pourrons, encore ici, appeler la *fonction principale* et la *fonction caractéristique* du mouvement.

En intégrant l'équation (86), identiquement comme nous l'avons fait aux numéros que nous venons de rappeler, nous trouverons, en désignant par  $m, n$  les vecteurs représentant la position et la vitesse *initiales*, et par  $m', n'$  les vecteurs représentant la position et la vitesse *actuelles*,

$$(92) \quad \omega_n F = \omega_n V = n,$$

$$(93) \quad \omega_n F = \omega_n V = n',$$

$$(94) \quad \delta F = \mathfrak{S}^n \delta m - \mathfrak{S}^{n'} \delta m' - H \delta t,$$

$$(95) \quad \delta V = \mathfrak{S}^n \delta m - \mathfrak{S}^{n'} \delta m' + t \delta H,$$

$$(96) \quad \omega_t F = -H,$$

$$(97) \quad \omega_n V = t.$$

Ici,  $F$  est une fonction réelle de  $m, m', t$ , et  $V$  une fonction réelle de  $m, m', H$ , la masse  $m$  étant considérée comme donnée. Au lieu des vecteurs  $m, m'$ , nous pouvons chercher à introduire les quantités

réelles  $r, r', s$  qui en dépendent (n° 50). Nous avons

$$(98) \quad \begin{cases} \partial r = -r^{-1} \mathfrak{S}_M \partial M, \\ \partial r' = -r'^{-1} \mathfrak{S}_{M'} \partial M', \\ \partial s = -s^{-1} \mathfrak{S}_{(M' - M)} (\partial M' - \partial M). \end{cases}$$

Nous bornant à la fonction  $V$ , et remarquant que la formule (95) donne

$$(99) \quad \mathfrak{S}'_N \partial M - N' \partial M' = \omega_r V \cdot \partial r + \omega_{r'} V \cdot \partial r' + \omega_s V \cdot \partial s,$$

les variations  $\delta$  étant arbitraires, nous obtiendrons, au moyen des valeurs (98),

$$(100) \quad N = -M r^{-1} \omega_r V + (M' - M) s^{-1} \omega_s V,$$

$$(101) \quad N' = -M' r'^{-1} \omega_{r'} V + (M' - M) s^{-1} \omega_s V.$$

De là encore

$$(102) \quad \omega_r V = \frac{r \mathfrak{U}_{MM'} (M' - M) N}{\mathfrak{U}_{MM'}},$$

$$(103) \quad \omega_{r'} V = \frac{r' \mathfrak{U}_{MM'} (M - M') N'}{\mathfrak{U}_{MM'}},$$

et, en vertu de la formule (73),

$$(104) \quad \omega_s V = \frac{sc}{\mathfrak{U}_{MM'}}.$$

Or, des considérations indiquées au n° 50, il est assez facile de conclure que  $rN + r'N'$  est parallèle à  $\kappa$ , c'est-à-dire à  $M - M'$ ; par conséquent

$$(105) \quad \omega_r V = \omega_{r'} V.$$

On aurait semblablement

$$(106) \quad \omega_r F = \omega_{r'} F,$$

en sorte que chacune des fonctions  $F$  et  $V$  dépend de la somme  $r + r'$  des distances  $r$  et  $r'$ .

En considérant toujours  $m$  comme constante, nous pouvons donc

dire que la fonction principale, et par suite sa dérivée partielle  $(\omega_r F) = -H$  [formule (96)], sont fonctions des quantités réelles

$$r + r', s \text{ et } t.$$

Pareillement, la fonction caractéristique et sa dérivée partielle  $\omega_H V = t$  [formule (97)] sont fonctions de

$$r + r', s \text{ et } H.$$

Cette dernière conséquence n'est autre que l'énoncé, sous une forme un peu différente, du théorème de Lambert, que nous avons mentionné plus haut. Il est utile de remarquer qu'on arrive ainsi à ce théorème sans avoir recours aux propriétés des sections coniques, et en appliquant uniquement le calcul des quaternions à la loi de l'attraction planétaire.

Si nous élevons au carré les équations (100) et (101), en ayant égard à la relation (105), nous trouverons sans peine

$$(107) \quad 2P + 2H = (\omega_r V)^2 + (\omega_s V)^2 + \frac{r^2 - r'^2 + s^2}{rs} \omega_r V \cdot \omega_s V,$$

$$(108) \quad 2P' + 2H = (\omega_r V)^2 + (\omega_s V)^2 + \frac{r'^2 - r^2 + s^2}{rs} \omega_r V \cdot \omega_s V.$$

On déduit de là, en remplaçant P et P' par leurs valeurs  $\frac{m}{r}$  et  $\frac{m}{r'}$ ,

$$(109) \quad \omega_r V \cdot \omega_s V = \frac{m}{r+r'+s} - \frac{m}{r+r'-s},$$

$$(110) \quad \frac{1}{2} [(\omega_r V)^2 + (\omega_s V)^2] = H + \frac{m}{r+r'+s} + \frac{m}{r+r'-s}.$$

$$(111) \quad (\omega_r V + \omega_s V)^2 = 2H + \frac{4m}{r+r'+s} = m \left( \frac{4}{r+r'+s} - \frac{1}{a} \right),$$

$$(112) \quad (\omega_r V - \omega_s V)^2 = 2H + \frac{4m}{r+r'-s} = m \left( \frac{4}{r+r'-s} - \frac{1}{a} \right).$$

Mais, en vertu des formules (95), (99), (105), nous avons la variation

$$(113) \quad \delta V - t \delta H = \frac{1}{2} (\omega_r V + \omega_s V) \delta(r+r'+s) + \frac{1}{2} (\omega_r V - \omega_s V) \delta(r+r'-s).$$

La fonction V s'évanouissant en outre avec t, et par conséquent

avec  $s$ , il est facile de déduire de là les expressions

$$(114) \quad \mathbf{V} = \int_{-s}^{+s} \left( \frac{m}{r+r'+s} + \frac{\mathbf{H}}{2} \right)^{\frac{1}{2}} ds = \int_{-s}^{+s} \left( \frac{m}{r+r'+s} - \frac{m}{4a} \right)^{\frac{1}{2}} ds,$$

$$(115) \quad t = \frac{1}{4} \int_{-s}^{+s} \left( \frac{m}{r+r'+s} + \frac{\mathbf{H}}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{2} \int_{-s}^{+s} \left( \frac{4m}{r+r'+s} - \frac{m}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} ds.$$

$r + r'$  devant, dans ces intégrations, être traitée comme constante.

*Pendule de Foucault.*

§2. Considérons un pendule simple dont le point de suspension, rapporté au centre de la Terre, ait pour vecteur  $\mathbf{A}$ . Soient  $\lambda$  la latitude de ce point, et  $\mathbf{1}$  un vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre vers le pôle nord. Posons  $\mathfrak{C}_{\mathbf{A}} = a$ , et appelons  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de son axe. Il est aisé de voir que l'on a

$$(116) \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \omega \mathfrak{U}_{\mathbf{A}} \mathbf{1},$$

et de là

$$(117) \quad \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = \omega \mathfrak{U} \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{1} = -\omega^2 (\mathbf{A} - \mathbf{1} a \sin \lambda).$$

Soient maintenant  $\mathbf{L}$  le vecteur de la lentille du pendule rapportée au point de suspension,  $m$  la masse de la lentille, et  $\mathbf{R}$  la tension du fil. Alors,  $\mathbf{A}_1$  étant un vecteur dirigé comme la pesanteur, nous aurons

$$m \left( \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{L}}{dt^2} \right) = -m\mathfrak{G} \mathfrak{U}_{\mathbf{A}_1} - \mathbf{R} \mathfrak{U}_{\mathbf{L}},$$

équation qui peut s'écrire

$$(118) \quad \mathfrak{U}_{\mathbf{L}} \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} + \mathfrak{U}_{\mathbf{L}} \frac{d^2\mathbf{L}}{dt^2} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{C}_{\mathbf{A}_1}} \mathfrak{U}_{\mathbf{A}_1} \mathbf{L}.$$

Eu y joignant la condition

$$(119) \quad \mathfrak{C}_{\mathbf{L}} = l,$$

qui exprime que la longueur du fil est constante, nous avons complètement les équations (118) et (119) ne peuvent pas s'intégrer d'une manière générale. Pour y parvenir par approximation, nous prendrons l'hypothèse du pendule de Foucault, c'est-à-dire que nous supposerons qu'il s'agisse d'oscillations très-petites, que nous regarderons comme négligeables les puissances de  $\omega$  supérieures à la première, ce qui revient à négliger  $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$ , et qu'enfin nous considérerons  $\lambda_1$  comme ayant la même direction que  $\lambda$ , en ne tenant pas compte de l'aplatissement du sphéroïde terrestre.

Cela admis, rapportons la lentille à la position la plus basse qu'elle puisse prendre sur la verticale du point de suspension, c'est-à-dire posons

$$(120) \quad \mathbf{P} = L + \frac{l}{a} \lambda.$$

Le vecteur  $\mathbf{P}$  pourra être considéré comme horizontal, sans qu'il y ait contradiction avec la condition (119), et les puissances de  $\mathbf{P}$  seront négligeables. L'équation (118) du mouvement devient alors

$$-l\mathfrak{V}_\lambda \frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} = g\mathfrak{V}_{\lambda\mathbf{P}},$$

ou, en posant

$$(121) \quad \frac{g}{l} = n^2,$$

$$(122) \quad \mathfrak{V}_\lambda \left( \frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} + n^2\mathbf{P} \right) = 0,$$

On reconnaît facilement que  $\mathfrak{V}_{\lambda\mathbf{E}} = \mathbf{E}$  et  $a\mathbf{1} - a\sin\lambda = \mathbf{N}$  sont deux vecteurs de modules égaux, situés dans le plan horizontal du lieu, et respectivement dirigés vers l'est et vers le nord. Nous pouvons donc poser

$$(123) \quad \mathbf{P} = x\mathbf{E} + y\mathbf{N}.$$

De là, en employant les relations (116), (117), et en introduisant les hypothèses énoncées ci-dessus, on voit sans peine que l'équation (122)



prend la forme

$$(124) \left( \frac{d^2x}{dt^2} + n^2x - 2 \frac{dy}{dt} \omega \sin \lambda \right) N - \left( \frac{d^2y}{dt^2} + n^2y + 2 \frac{dx}{dt} \omega \sin \lambda \right) E = 0,$$

c'est-à-dire que nous avons les deux équations

$$(125) \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + n^2x - 2 \frac{dy}{dt} \omega \sin \lambda = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + n^2y + 2 \frac{dx}{dt} \omega \sin \lambda = 0, \end{cases}$$

pour déterminer le mouvement du pendule en projection horizontale.

En rapportant ce mouvement à des axes mobiles autour de la verticale, dans le sens du nord à l'est, la vitesse de rotation étant  $\omega \sin \lambda$ , on trouve que ces équations se réduisent à

$$(126) \begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + n^2x_1 = 0, \\ \frac{d^2y_1}{dt^2} + n^2y_1 = 0, \end{cases}$$

$x_1$  et  $y_1$  étant les nouvelles coordonnées.

On reconnaît immédiatement ici les équations du mouvement elliptique d'un point sollicité par un centre fixe en raison directe de la distance; et l'on peut tirer de là, comme d'habitude, les diverses particularités du mouvement.

Nous ne pousserons pas plus loin les exemples que nous avons tenu à mettre sous les yeux du lecteur, pour montrer comment les quaternions peuvent être appliqués aux questions de Mécanique rationnelle. Dans les ouvrages d'Hamilton et de Tait, on trouve cependant l'indication plus ou moins développée d'applications à la Mécanique céleste, à la théorie de la lumière, à la théorie de l'électricité, à l'élasticité des corps solides, en un mot à toutes les branches de la Mécanique et de la Physique mathématique. Pour la théorie de la déformation des corps surtout, Tait fait un grand usage du symbole d'opération  $\nabla$ , imaginé par Hamilton, et qui se définit par la relation

$$\nabla = \mathbf{I}_1 \frac{d}{dx_1} - \mathbf{I}_2 \frac{d}{dx_2} + \mathbf{I}_3 \frac{d}{dx_3},$$

L'emploi de cet opérateur, dont nous n'avons pas eu l'occasion de parler dans ce qui précède, semble être très-avantageux dans un grand nombre de questions de Géométrie ou de Mécanique. Mais les développements auxquels conduirait cette étude nouvelle nous forceraient à dépasser les limites que nous avons voulu nous fixer.

Dans l'état présent de la Science, nous voyons que les quaternions se prêtent à des applications nombreuses et très-variées. Fort souvent ils apportent une réelle simplification en abrégant notablement le nombre des équations à écrire. Voilà ce que nous désirions établir, et nous avons l'espoir d'y être parvenu.

Le jour où cette analyse nouvelle cesserait d'être mise de côté, le jour où l'on s'appliquerait à y introduire des perfectionnements semblables à ceux qui se sont produits dans les autres branches des sciences mathématiques, on verrait s'accroître encore le domaine des questions physiques auxquelles cet instrument analytique pourrait être utilement appliqué. Il y a là matière à de nombreuses et vastes recherches, fécondes en résultats, car nous croyons que le calcul d'Hamilton est loin d'avoir dit son dernier mot.

*Mouvement d'un point pesant sur un parabolöide;*

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN,

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Un point pesant, assujéti à se mouvoir sur une surface donnée sans éprouver de frottements ni de résistances de milieu, peut décrire une infinité de trajectoires, que M. Resal m'a proposé, dans une conversation particulière, d'appeler *lignes de thalweg*, parce qu'elles figurent le trajet d'un filet liquide, très-mince et parfaitement fluide, qui coulerait sur la surface. Pour qu'une ligne de thalweg soit déterminée, il ne suffit pas, comme dans le cas d'une ligne géodésique, de connaître un de ses points et la tangente en ce point, il faut encore tenir compte de l'orientation de la surface et de la vitesse avec laquelle le mobile décrivant passe au point donné : aussi les propriétés générales des lignes de thalweg doivent-elles être beaucoup plus compliquées que celles des lignes géodésiques; mais on peut les étudier sur une surface particulière, et je me suis proposé de le faire sur un parabolöide, elliptique ou hyperbolique, dont l'axe est vertical.

En partant des équations ordinaires du mouvement d'un point sur une surface, j'obtiens une équation du premier ordre à laquelle satisfont les lignes de thalweg des parabolöides; je montre comment la méthode de Jacobi peut donner la solution du problème, mais elle est moins élémentaire que la première et indique moins clairement la valeur des constantes d'intégration. J'étudie avec détails la forme des lignes de thalweg, et je trouve entre autres une propriété analogue à celle que M. Puiseux a démontrée au tome VII de ce Journal sur la différence d'azimut des points où la hauteur d'un pendule sphérique est maximum. Enfin, en supposant que l'action de la pesanteur de-

vienne nulle, l'équation des lignes de thalweg se réduit à celle des lignes géodésiques du paraboloidé; il y a quelque intérêt à considérer ces dernières directement, au lieu de n'en faire qu'un cas particulier des lignes géodésiques sur les surfaces du second ordre.

Prenons trois axes rectangulaires  $OX, OY, OZ$ , le dernier dirigé en sens contraire de la pesanteur, et considérons d'abord le paraboloidé elliptique

$$(1) \quad \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0,$$

qui tourne sa convexité vers le bas; les équations du mouvement d'un point pesant sur cette surface ont une forme bien connue,

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = k \frac{x}{p}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = k \frac{y}{q}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -k - g.$$

Quand le mobile reste très-près du sommet, on peut regarder  $k$  comme sensiblement égal à  $-g$ , et les deux premières équations donnent la loi approchée du mouvement de la projection sur le plan horizontal,

$$x = a \cos \sqrt{\frac{g}{p}}(t - t_1), \quad y = b \cos \sqrt{\frac{g}{q}}(t - t_2);$$

ces équations, qu'on trouve dans plusieurs questions de Physique, représentent un mouvement suffisamment connu.

Revenons au cas général, et ajoutons les équations (2) multipliées respectivement par  $\frac{x}{p}, \frac{y}{q}$  et  $-1$ ; nous aurons

$$\frac{x}{p} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{y}{q} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d^2z}{dt^2} = k \left( \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 1 \right) + g;$$

différentions deux fois l'équation (1) par rapport au temps, et retranchons le résultat du précédent, il reste

$$-\frac{1}{p} \frac{dx^2}{dt^2} - \frac{1}{q} \frac{dy^2}{dt^2} = k \left( \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 1 \right) + g.$$

J'élimine  $k$  entre cette équation et celle que j'obtiens en multi-

pliant la première équation (2) par  $\frac{1}{p} \frac{dx}{dt}$ , la deuxième par  $\frac{1}{q} \frac{dy}{dt}$ ; et, ajoutant membre à membre, le résultat de l'élimination peut s'écrire

$$\frac{\frac{1}{p} \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{q} \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{1}{p} \frac{dx}{dt} + \frac{1}{q} \frac{dy}{dt}} + \frac{\frac{x}{p^2} \frac{dx}{dt} - \frac{y}{q^2} \frac{dy}{dt}}{\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 1} = 0.$$

On aperçoit immédiatement l'intégrale de cette équation,

$$(3) \quad \left( \frac{1}{p} \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{1}{q} \frac{dy^2}{dt^2} + g \right) \left( \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 1 \right) = c.$$

Écrivons maintenant l'intégrale des forces vives

$$(4) \quad \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dt^2} + gz = \frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2} + gz = h;$$

il suffit d'éliminer  $dt$  entre cette équation et la précédente pour avoir une équation à laquelle satisfait la trajectoire cherchée, ligne de thalweg sur le paraboloidé,

$$(5) \quad \left[ 2(h - gz) \left( \frac{dx^2}{p^2} + \frac{dy^2}{q^2} \right) + g ds^2 \right] \left( \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 1 \right) = c ds^2.$$

Je désigne par T la ligne de thalweg que je considère; l'équation de sa projection horizontale s'obtiendrait en remplaçant dans (5)  $z$  et  $dz$  par leurs valeurs tirées de (1); malheureusement les variables  $x$  et  $y$  ne se séparent pas dans l'équation de la projection, à moins de supposer  $p$  ou  $q$  infini, ce qui fait disparaître plusieurs termes. Dans ce cas le paraboloidé dégénère en un cylindre parabolique dont les génératrices sont parallèles à OX ou à OY; T se projette horizontalement suivant une courbe de forme analogue à une sinusoïde qui serpenterait entre les projections de deux génératrices. Ce cas aurait pu se traiter sans former l'équation (3): on écrirait que  $dt$  est proportionnel à  $dx$  ou à  $dy$ , et on le remplacerait par sa valeur dans l'équation (4).

Un autre cas simple est celui où  $p = q$ ; on peut faire cette hypo-

thèse dans les formules générales, ou, employant des coordonnées semi-polaires,  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ , associer à l'intégrale des forces vives l'équation alors évidente  $r^2 d\theta = c dt$ ; la ligne de thalweg est formée d'une infinité d'arcs égaux touchant alternativement deux parallèles de la surface.

Quand le parabolôide est quelconque, pour ramener à des quadratures l'intégration de (5), je considère les parabolôides homofocaux au proposé,

$$(6) \quad \frac{x^2}{\lambda - p} + \frac{y^2}{\lambda - q} = \lambda - 2z, \quad \frac{x^2}{p - \mu} - \frac{y^2}{\mu - q} = 2z - \mu.$$

Je suppose que l'on ait

$$\lambda > p > \mu > q;$$

les surfaces précédentes coupent le parabolôide donné suivant ses deux séries de lignes de courbure; celles qui sont données par les surfaces  $\lambda$  se projettent horizontalement suivant des ellipses, et ont elles-mêmes la forme d'un ovale non situé dans un plan; je représenterai par  $E_\lambda$  celle qui correspond à une valeur  $\lambda$  de  $\lambda$ . Les lignes de courbure données par les surfaces  $\mu$  se projettent suivant des hyperboles; elles-mêmes sont formées de deux branches symétriques par rapport au plan ZOZ qu'elles ne rencontrent pas; j'appelle  $H_m$  celle qui correspond à la valeur  $m$  de  $\mu$ . On peut voir que  $H_q$  se réduit à la parabole principale P, située dans le plan ZOZ;  $E_p$  se réduit à un arc de la parabole Q située dans le plan YOZ, arc compris entre les deux ombilics N, N'; enfin  $H_p$  se compose des deux parties de la même parabole qui sont séparées par l'arc NON'.

A chaque valeur de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  correspondent des valeurs uniques de  $\lambda$  et de  $\mu$ , satisfaisant aux inégalités admises, tandis qu'à des valeurs connues de  $\lambda$  et de  $\mu$  répondent quatre points de notre surface. Les équations (1) et (6) donnent, par un calcul bien connu,

$$x^2 = \frac{p(\lambda - p)(p - \mu)}{p - q}, \quad y^2 = \frac{q(\lambda - q)(\mu - q)}{p - q}, \quad z = \frac{\lambda + \mu - p - q}{2}.$$

On en tire  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , et, en combinant les valeurs obtenues, on

trouve

$$(7) \quad \begin{cases} 4 ds^2 = \frac{\lambda(\lambda-\mu) dx^2}{(\lambda-p)(\lambda-q)} + \frac{\mu(\lambda-\mu) dy^2}{(p-\mu)(\mu-q)}, \\ 4 \left( \frac{dx^2}{p} + \frac{dy^2}{q} \right) = \frac{(\lambda-\mu) dx^2}{(\lambda-p)(\lambda-q)} + \frac{(\lambda-\mu) dy^2}{(p-\mu)(\mu-q)}, \\ \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + 1 = \frac{\lambda\mu}{pq}. \end{cases}$$

On a tout ce qu'il faut pour transformer l'équation (5) en fonction des coordonnées curvilignes  $\lambda$  et  $\mu$ ; on substitue, on divise par  $4(\lambda-\mu)$ , et, après quelques transpositions qui se présentent d'elles-mêmes, on trouve pour équation des lignes de thalweg

$$(8) \quad \frac{\pm dx \sqrt{\lambda}}{\sqrt{-f(\lambda)(\lambda-p)(\lambda-q)}} = \frac{\pm d\mu \sqrt{\mu}}{\sqrt{f(\mu)(p-\mu)(\mu-q)}},$$

en posant, pour abrégér,

$$(9) \quad f(u) = gu^2 - (2h + gp + gq)u + cpq.$$

Pour appliquer la méthode de Jacobi à l'étude du mouvement qui nous occupe, on exprime la demi-force vive  $F$  en fonction des dérivées  $\lambda'$  et  $\mu'$  de  $\lambda$  et de  $\mu$  par rapport au temps; la première équation (7) donne tout de suite

$$F = \frac{1}{8} \frac{\lambda(\lambda-\mu)}{(\lambda-p)(\lambda-q)} \lambda'^2 + \frac{1}{8} \frac{\mu(\lambda-\mu)}{(p-\mu)(\mu-q)} \mu'^2;$$

on introduit comme variables nouvelles  $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial F}{\partial \mu}$  à la place de  $\lambda'$  et  $\mu'$ , et l'on exprime  $F$  en fonction de  $\lambda, \mu$  et des variables introduites, qu'on remplace ensuite par  $\frac{\partial S}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial S}{\partial \mu}$ ; on porte le résultat obtenu dans la relation  $F + gz = h$ , et l'on a l'équation aux dérivées partielles

$$2 \frac{(\lambda-p)(\lambda-q)}{\lambda(\lambda-\mu)} \left( \frac{\partial S}{\partial \lambda} \right)^2 + 2 \frac{(p-\mu)(\mu-q)}{\mu(\lambda-\mu)} \left( \frac{\partial S}{\partial \mu} \right)^2 + g \frac{\lambda + \mu - p - q}{2} = h.$$

En multipliant par  $\lambda - \mu$ , on peut aisément dédoubler l'équation

et obtenir une intégrale renfermant une arbitraire  $a$ ,

$$S_1 = \int d\lambda \sqrt{\lambda \frac{(2h + gp + gq)\lambda - g\lambda^2 - a}{(\lambda - p)(\lambda - q)}} + \int d\mu \sqrt{\mu \frac{g\mu^2 - (2h + gp + gq)\mu + a}{(p - \mu)(\mu - q)}}.$$

Jacobi a démontré que les intégrales du problème peuvent s'écrire

$$\frac{dS_1}{da} = b, \quad \frac{dS_1}{dh} = t + \varepsilon;$$

la première ne diffère pas de l'équation (8) intégrée après qu'on a remplacé  $cpq$  par  $a$ ; la seconde devient, en employant notre fonction  $f$ , équation (9),

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\pm \lambda^2 d\lambda}{\sqrt{-f(\lambda)(\lambda - p)(\lambda - q)}} + \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\pm \mu^2 d\mu}{\sqrt{f(\mu)(p - \mu)(\mu - q)}} = t;$$

elle détermine la loi du mouvement sur la trajectoire. On l'obtiendrait en transformant l'intégrale des forces vives à l'aide des équations (7) et (8), mais la méthode de Jacobi la donne plus naturellement.

Pour discuter la forme des lignes de thalweg, il convient de chercher les valeurs de  $u$  qui annulent  $f(u)$ . Les équations (3) et (4) donnent les valeurs de  $c$  et de  $h$  en fonction de  $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$ , c'est-à-dire des conditions initiales du mouvement; les équations (7) permettent de transformer ces expressions en fonction de  $\lambda_0, \mu_0, \lambda'_0, \mu'_0$ , et, en les substituant dans (9), on a

$$f(u) = g(u - \lambda_0)(u - \mu_0) - \frac{\lambda_0(\lambda_0 - \mu_0)\lambda_0'^2}{4(\lambda_0 - p)(\lambda_0 - q)}(u - \mu_0) - \frac{\mu_0(\lambda_0 - \mu_0)\mu_0'^2}{4(p - \mu_0)(\mu_0 - q)}(u - \lambda_0).$$

Or  $f(\mu_0)$  est essentiellement positif, car  $c$ 'est un carré;  $f(\lambda_0)$  est négatif, et  $f(\infty)$  positif;  $f(u)$  = 0 admet donc une racine  $\alpha$  supérieure à  $\lambda_0$ , et une  $\beta$  comprise entre  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ . Nous pouvons écrire, au lieu de l'équation (8),

$$(10) \quad \frac{\pm d\lambda \sqrt{\lambda}}{\sqrt{(x - \lambda)(\lambda - \beta)(\lambda - p)(\lambda - q)}} = \frac{\pm d\mu \sqrt{\mu}}{\sqrt{(x - \mu)(\beta - \mu)(p - \mu)(\mu - q)}}.$$



Je dis que les binômes  $\alpha - \lambda$ ,  $\lambda - \beta$ ,  $\alpha - \mu$ ,  $\beta - \mu$  sont positifs; en effet, l'équation (8) prouve que  $-f(\lambda)$  et  $f(\mu)$  ont le même signe. Or la somme

$$-f(\lambda) + f(\mu) = [2h + g(p + q - \lambda - \mu)](\lambda - \mu) = (\lambda - \mu) \frac{ds^2}{dt^2}$$

est positive; il en est de même de  $f(\mu)$  et de  $-f(\lambda)$ ; le coefficient de  $u^2$  dans  $f(u)$  étant positif,  $\lambda - \alpha$  et  $\lambda - \beta$  sont de signes contraires, et c'est nécessairement le second qui est  $> 0$ ;  $\mu - \alpha$  et  $\mu - \beta$  ont le même signe, et c'est le signe  $-$ , qui convient certainement à  $\mu - \alpha$ .

Déterminons encore les angles  $i, i'$  que T fait en un de ses points avec les lignes de courbure qui y passent; celles-ci forment avec les deux lignes de courbure infiniment voisines un petit rectangle dont la diagonale est  $ds$ , et les côtés sont les valeurs auxquelles se réduirait  $ds$  si l'on y faisait tour à tour  $d\lambda$  ou  $d\mu$  égaux à zéro; ce rectangle donne

$$\frac{\sin^2 i}{\sin^2 i'} = \frac{\lambda(\lambda - \mu) d\lambda^2}{(\lambda - p)(\lambda - q)} : \frac{(\mu - \lambda - \alpha) d\mu^2}{(\mu - \alpha)(\mu - \beta)}$$

mais, si  $d\lambda$  et  $d\mu$  vérifient l'équation (10), ce rapport devient

$$(11) \quad \frac{\sin^2 i}{\sin^2 i'} = \frac{\alpha - \lambda}{\alpha - \mu} \frac{\lambda - \beta}{\beta - \mu}$$

Il s'agit maintenant de voir ce que nous donnerait l'intégration de l'équation (10); les deux signes  $\pm$  doivent être tels que les deux membres soient tous deux  $> 0$  ou tous deux  $< 0$ ; je puis faire en sorte qu'ils soient positifs. Je distingue deux cas, selon que  $\beta$  est  $< p$  ou  $\geq p$ . Dans la première hypothèse,  $\lambda$  doit rester compris entre  $p$  et  $\alpha$ ,  $\mu$  entre  $q$  et  $\beta$ ; l'équation (11) montre que, pour  $\lambda = \alpha$ , T est tangente à  $E_\alpha$ , tandis que, pour  $\lambda = p$ , elle coupe sous un angle fini  $E_p$ , c'est-à-dire l'arc de parabole principale  $NON'$ ; de même T touchera  $H_\beta$  et traversera  $H_q$ , c'est-à-dire P. Notre trajectoire sera inscrite dans le quadrilatère compris entre  $E_\alpha$  et les deux branches de  $H_\beta$ . Si  $\alpha$  est très-voisin de  $p$ , ou  $\beta$  de  $q$ , le mobile restera sur une zone très-étroite; il oscillera tout près de P ou de Q sans s'en écarter beaucoup; il est

nécessaire toutefois, pour qu'il reste dans le voisinage de Q, qu'il ne monte pas plus haut que les ombilics. Les petites oscillations étudiées dès l'abord rentrent dans ce premier cas.

Quand  $\beta > p$ ,  $\mu$  peut prendre toutes les valeurs dont il est susceptible, c'est-à-dire varier entre  $p$  et  $q$ ;  $\lambda$  doit rester entre  $\alpha$  et  $\beta$ ; T est comprise dans une zone annulaire entre les courbes  $E_\alpha$  et  $E_\beta$  qu'elle touche tour à tour, tandis qu'elle traverse P et Q; elle pourrait même se confondre avec une ligne de courbure si  $\alpha$  était égal à  $\beta$ . En les supposant inégaux, étudions le mouvement à partir du moment où le mobile a touché  $E_\alpha$ ; alors  $\lambda = \alpha$  et  $\mu = \mu_0$ . Supposons que  $\mu$  aille d'abord en croissant;  $\lambda$  décroîtra jusqu'à  $\beta$  pour revenir à  $\alpha$ , tandis que  $\mu$ , ayant atteint sa limite  $p$ , descendra jusqu'à  $q$ , puis augmentera pour être égal à  $\mu_1$ , au point où T reviendra toucher  $E_\alpha$ ; or je dis que  $\mu_1$  est  $> \mu_0$ , c'est-à-dire que, pendant que le mobile part d'un premier point de contact avec  $E_\alpha$  pour revenir le toucher de nouveau, son azimut a augmenté de plus de 180 degrés.

Remarquons que les deux différentielles qui entrent dans l'équation (10) sont identiques; les limites de l'intégration diffèrent seules; je désigne par le symbole  $|a, b|$  l'intégrale de l'un ou de l'autre membre prise entre les limites  $a$  et  $b$ , en faisant en sorte que tous les éléments soient positifs. Cela posé, quand  $\lambda$  varie de  $\alpha$  jusqu'à  $\beta$  pour revenir à  $\alpha$ , l'intégrale du premier membre de (10) croît de  $2| \beta, \alpha |$ ; si  $\mu$ , partant de  $\mu_0$  pour arriver à  $p$ , diminue jusqu'à  $q$  et revient ensuite seulement jusqu'à  $\mu_0$ , ou à plus forte raison jusqu'à une valeur moindre que  $\mu_0$ , l'intégrale du second membre croît au plus de

$$| \mu_0, p | + | q, p | + | q, \mu_0 | = 2 | q, p | ;$$

cet accroissement est moindre que celui de l'intégrale du premier membre, car on a évidemment

$$| \beta, \alpha | > \int_{\beta}^{\alpha} \frac{d\lambda \sqrt{\rho}}{\sqrt{(\alpha - \lambda)(\lambda - \beta)(\lambda - \rho)(\lambda - q)}},$$

$$| q, p | < \int_q^p \frac{d\mu \sqrt{\rho}}{\sqrt{(\alpha - \mu)(\beta - \mu)(\rho - \mu)(\mu - q)}}.$$

L'inégalité annoncée résulte de ce que les seconds membres des deux inégalités ci-dessus sont égaux, en vertu d'une propriété de l'intégrale elliptique de première espèce, que je démontre, du reste, en deux mots. Dans l'intégrale en  $\mu$  substituons à cette variable une autre variable  $\rho$  qui lui soit liée par la relation

$$\mu \rho - \frac{p\alpha - q\beta}{p + \alpha - q - \beta} (\mu + \rho) + \frac{p\alpha - \beta - q}{p + \alpha - q - \beta} = q\beta \frac{p + \alpha}{p + \alpha - q - \beta} = 0,$$

l'intégrale se transforme en une autre, identique à l'intégrale en  $\lambda$ .

Il faut que  $\mu$  atteigne non-seulement la valeur  $\mu_0$ , mais la dépasse et soit égal à  $\mu_1$  quand  $\lambda$  redevient égal à  $\alpha$ , de sorte que

$$2 \mid \beta, \alpha \mid - 2 \mid q, p \mid = \mid \mu_0, \mu_1 \mid;$$

$\mu$  pourrait être obligé d'atteindre de nouveau la limite  $p$  et de décroître ensuite, mais il n'en résulte pas de difficulté. Supposons  $\beta$  très-peu supérieur à  $p$ ; quand  $\mu$  est voisin de  $p$ , le coefficient de  $d\mu$  dans (10) est très-grand, et en général nous aurons notre valeur  $\mu$ , satisfaisant à l'égalité (12) sans que  $\mu$  atteigne une seconde fois  $p$ ; les coordonnées des points de contact de T avec  $E_\alpha$  seront  $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \mu_{n+1}, \dots$ ; mais plus  $\mu_n$  sera près de  $p$ , moins  $\mu_{n+1}$  devra lui être supérieur pour que  $\mid \mu_n, \mu_{n+1} \mid$  soit égal au premier membre de (12). Il est clair que les arcs successifs de T se rapprocheront d'abord de plus en plus de la portion de Q intérieure à  $E_\alpha$ ; mais, au bout d'un certain temps, ils s'en éloigneront. On pourrait faire en sorte que le mobile oscillât sur la parabole principale Q, ou que  $\mu$  fût toujours égal à  $p$ ; mais le moindre écart suffirait pour éloigner la trajectoire de sa position primitive; il faut, bien entendu, que l'arc décrit primitivement sur Q dépasse les ombilics.

Quand le paraboloidé est de révolution, les points de contact avec  $E_\alpha$  sont des points où la hauteur du mobile est maximum, et l'on a le théorème analogue à celui de M. Puiseux sur le pendule sphérique.

Supposons  $\beta = p$ : l'équation (10) ne conduit qu'à des intégrales elliptiques; il n'est pas nécessaire de les calculer pour avoir la forme

de T. On fera varier  $\lambda$  entre  $p$  et  $\alpha$ ,  $\mu$  entre  $p$  et  $q$ ; admettons encore que, pour  $\lambda = \alpha$ ,  $\mu$  soit égal à  $\mu_0$  et aille en croissant vers la limite  $p$ ; comme  $|\mu_0, p|$  est infini, aussi bien que  $|p, \alpha|$ , quand  $\mu$  sera égal à  $p$ ,  $\lambda$  devra arriver à la même valeur, c'est-à-dire que T passera par un ombilic. La courbe dépassera ce point,  $\lambda$  et  $\mu$  prendront des valeurs différentes de  $p$ , atteindront, le premier  $\alpha$ , le second  $q$ , et reviendront tous deux vers la valeur  $p$  qu'elles reprendront simultanément; T passera au second ombilic. La courbe est formée d'une suite d'arcs allant d'un ombilic à l'autre en touchant  $E_x$ , et sans rencontrer Q autre part qu'en N et N'; il résulte du paragraphe précédent que les points de contact avec  $E_x$  se rapprochent de plus en plus de l'un des sommets de cette ligne situés dans le plan ZOY, et T tend indéfiniment à se confondre avec un arc de Q.

Le mouvement d'un point pesant sur un paraboloïde hyperbolique se déduit aisément de ce qui précède: il suffit de changer dans les formules  $q$  en  $-q$ . Il faut aussi remarquer que les deux séries de surfaces homofocales qui coupent réellement la proposée sont représentées par les équations

$$\frac{x^2}{\lambda - p} + \frac{y^2}{\lambda + q} = \lambda - 2z, \quad \frac{x^2}{p - \mu} - \frac{y^2}{q + \mu} = 2z - \mu,$$

$\lambda$  étant plus grand que  $p$ , et  $\mu < -q$ . Je continue à désigner par  $E_l$  et  $H_m$  les lignes de courbure répondant à  $\lambda = l$  ou à  $\mu = m$ , quoique ces deux systèmes de lignes se projettent suivant des hyperboles; les deux branches de  $E_l$  sont séparées par le plan YOZ, et celles de  $H_m$  par le plan ZOX; il n'y a plus d'ombilics. L'équation (10) devient dans ce cas

$$(13) \quad \frac{\pm d\lambda \sqrt{\lambda}}{\sqrt{(x-\lambda)(\lambda-\beta)(\lambda-p)(\lambda+q)}} = \frac{\pm d\mu \sqrt{\mu}}{\sqrt{(x-\mu)(\beta-\mu)(p-\mu)(q-\mu)}};$$

on démontre, comme dans la première question, que tous les binômes qui entrent dans (13) doivent être positifs, sauf  $\mu + q$ , qui est négatif comme  $\mu$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  sont encore les racines d'une équation du second degré, la première supérieure à  $\lambda_0$ , la seconde comprise entre  $\lambda_0$  et

$\mu_0$ . La ligne de thalweg aura trois formes différentes selon que  $\beta$  sera plus grand que  $p$ , compris entre  $p$  et  $-q$ , enfin inférieur à  $-q$ .

Soit  $\beta > p$ ;  $\lambda$  doit rester compris entre  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $\mu$  prenant toutes les valeurs dont il est susceptible, c'est-à-dire variant de  $-q$  à  $-\infty$ . T traverse ZOY pour  $\mu = -q$ , et s'éloigne indéfiniment de ce plan de part et d'autre, tout en serpentant entre les branches de  $E_\alpha$  et de  $E_\beta$  qui sont situées d'un même côté de ZOY; il n'y a qu'un nombre fini de points de contact, car le symbole  $|a, b|$  ayant une signification analogue à celle que nous lui avons donnée d'abord,  $|\infty, -q|$  a une valeur finie;  $\mu$  variant de  $-q$  à  $-\infty$ ,  $\lambda$  ne peut aller qu'un nombre fini de fois de  $\alpha$  à  $\beta$ .

Quand  $\beta$  est compris entre  $p$  et  $-q$ ,  $\lambda$  varie entre  $p$  et  $\alpha$ ,  $\mu$  entre  $-q$  et  $-\infty$ ; T a une forme analogue à celle que je viens de décrire, sauf qu'elle serpente entre les deux branches de  $E_\alpha$ , au lieu que ce soit entre une d'elles et une branche de  $E_\beta$ . Quand  $\beta < -q$ ,  $\mu$  varie entre  $\beta$  et  $-\infty$ , T touche une fois  $H_\beta$  et s'en éloigne suivant deux lignes qui serpentent entre les branches de  $E_\alpha$ .

L'équation (13) conduit à de simples intégrales elliptiques quand  $\beta$  est égal à  $p$ , à zéro ou à  $-q$ ; dans les deux premiers cas, la forme de T se déduit aisément de ce qui précède et est peu remarquable; elle le devient pour  $\beta = -q$ . Je suppose que  $\mu$  augmente à partir de  $\mu_0$  en tendant vers  $-q$ ; si l'on intègre l'équation (13), le second membre devient  $|\mu_0, -q|$  et est infini; il doit en être de même de l'intégrale en  $\lambda$ , et il faut pour cela que  $\lambda$  aille un nombre infini de fois de  $p$  à  $\alpha$  et de  $\alpha$  à  $p$ ; T oscillant un nombre infini de fois entre les branches de  $E_\alpha$  se rapproche indéfiniment de P; sa projection horizontale tend à prendre la forme de la courbe  $x = \sin \frac{1}{y}$ .

Le mouvement sur un paraboloidé elliptique qui tourne sa convexité vers le haut se déduirait de nos premiers calculs en supposant OZ dirigé dans le sens de la pesanteur, ou en changeant dans nos formules  $g$  en  $-g$ . Les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  pour lesquelles  $f(u)$  s'annule sont, la première comprise entre  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ , la seconde inférieure à  $\mu_0$ ;  $f(\mu)$  et  $-f(\lambda)$  doivent encore être  $> 0$ ; mais, comme dans  $f(u)$  le terme du second degré est  $-gu^2$ , on trouve que  $\lambda$  doit être supérieur à  $\alpha$  et à  $\beta$ ,

$\mu$  compris entre ces deux quantités. Il y a quatre cas dans la discussion de T, selon que  $\alpha \geq p$  et  $\beta \geq q$ . Soit  $\alpha > p$  et  $\beta < q$ ;  $\lambda$  doit varier entre  $\alpha$  et  $\infty$ ,  $\mu$  entre  $p$  et  $q$ ; T touche  $E_\alpha$  puis s'en éloigne indéfiniment en traversant toutes les lignes H, mais elle ne fait qu'un nombre fini de circuits autour du parabolôïde,  $|\alpha, \infty|$  étant fini. Dans les trois autres hypothèses, les formes de T se rapprochent de celles qu'on trouve sur le parabolôïde hyperbolique, et je ne les passe pas en revue.

Supposons enfin que la pesanteur disparaisse ou que  $g$  s'annule; les lignes de thalweg deviennent des lignes géodésiques que je désigne par G; leur équation sur le parabolôïde elliptique se déduit de (8) et peut s'écrire

$$(14) \quad \frac{d\lambda \sqrt{\lambda}}{\sqrt{(\lambda - \alpha)(\lambda - p)(\lambda - q)}} = \frac{d\mu \sqrt{\mu}}{\sqrt{(\alpha - \mu)(p - \mu)(\mu - q)}},$$

$\alpha$  étant égal à  $\frac{cpq}{2h}$ . L'équation (11) se réduit à la suivante :

$$\frac{\sin^2 i}{\sin^2 i'} = \frac{\lambda - \alpha}{\alpha - \mu}, \quad \lambda \sin^2 i' + \mu \sin^2 i = \alpha,$$

propriété connue des lignes géodésiques sur les surfaces du second ordre. Quand  $\alpha > p$ ,  $\lambda$  varie de  $\alpha$  à  $\infty$ ,  $\mu$  de  $p$  à  $q$ ; G, après avoir touché  $E_\alpha$ , s'en éloigne indéfiniment, mais en tournant comme une spirale autour du parabolôïde; car ici  $|\alpha, \infty|$  (ce symbole ayant une signification analogue à celle qu'il a eue jusqu'ici) est infini; quand donc  $\lambda$  va de  $\alpha$  à  $\infty$ , il faut que  $\mu$  aille un nombre illimité de fois de  $p$  à  $q$ . Si  $\alpha < p$ , G serpente entre les deux branches de  $H_\alpha$  qu'elle touche un nombre infini de fois.

Lorsque  $\alpha$  est égal à  $p$ , (14) pourrait s'intégrer à l'aide de logarithmes; mais remarquons que  $\lambda$  et  $\mu$  peuvent prendre toutes les valeurs dont ils sont susceptibles, et supposons que  $\lambda$  croisse d'abord à partir de  $\lambda_0$ , il augmentera indéfiniment; l'intégrale du premier membre de (14) deviendra infinie; il devra en être de même pour le second membre, et cela exige que  $\mu$  tende vers  $p$  en même temps que  $\lambda$  vers  $\infty$ . G a une branche infinie dont la projection horizontale aurait une asymptote parallèle à OY; mais cette asymptote est rejetée à l'in-

fini. Soit, en effet,  $p - \varepsilon$  la valeur de  $\mu$  correspondant à une très-grande valeur  $\lambda_1$  de  $\lambda$ ; les intégrales  $|\lambda_0, \lambda_1|$  et  $|\mu_0, p - \varepsilon|$ , qui sont égales et très-grandes, ne diffèrent que de quantités finies, l'une de  $L\lambda_1$ , l'autre de  $\sqrt{\frac{p}{p-q}} L\frac{1}{\varepsilon}$ ; donc  $\lambda_1 = \frac{1}{\varepsilon^n}$ ,  $n$  étant  $> 1$ ; or, pour les points à l'infini sur  $G$  ou sur sa projection,

$$\lim x = \lim \sqrt{\frac{p\varepsilon(\lambda_1 - p)}{p - q}} = \infty.$$

Si l'on suit  $G$  à partir du point initial dans le sens où  $\lambda$  décroît, on voit que, quand cette variable arrive à  $p$ , il en doit être de même de  $\mu$ :  $G$  passe par un ombilic, puis s'en éloigne en donnant une seconde partie dont la projection forme aussi une branche parabolique dans la direction de  $OY$ .

Les lignes géodésiques du paraboloïde hyperbolique seraient données par l'équation (14) en y changeant  $q$  en  $-q$ . Si  $\alpha$  est  $> p$  ou  $< -q$ ,  $G$  se compose de deux branches infinies qui partent d'un point où elles touchent  $E_x$  ou  $H_x$ , et traversent toutes les lignes de courbure du système opposé. Quand  $\alpha$  est entre  $p$  et  $-q$ ,  $G$  coupe toutes les lignes de courbure; si, en particulier, on fait  $\alpha = 0$ , l'équation (14) modifiée donne

$$\frac{-d\lambda}{\sqrt{(\lambda - p)(\lambda - q)}} = \frac{-d\mu}{\sqrt{(p - \mu)(\mu - q)}},$$

$$\frac{d\lambda^2}{(\lambda - p)(\lambda - q)} + \frac{d\mu^2}{(p - \mu)(\mu - q)} = 0;$$

on pourrait intégrer; mais, en se reportant aux équations (7), on trouve que cette relation, sous sa forme rationnelle, équivaut à

$$\frac{dx^2}{p} - \frac{dy^2}{q} = 0, \quad \frac{dx}{\sqrt{p}} = \pm \frac{dy}{\sqrt{q}};$$

elle représente les génératrices rectilignes qu'on devait trouver au nombre des lignes géodésiques. Enfin, quand  $\alpha$  est égal à  $p$  ou à  $-q$ ,

G coupe encore toutes les lignes de courbure, mais sa projection horizontale est asymptote à OY dans le premier cas, à OX dans le second. Il serait aisé de vérifier par le calcul que les lignes géodésiques sur le paraboloidé présentent les mêmes propriétés que sur les surfaces à centre, mais c'est leur forme que je me suis surtout proposé d'indiquer.



*Sur la courbure des surfaces réciproques;*

PAR M. JEAN FRANKE,

Professeur à l'École Polytechnique de Lemberg.

## I.

Soient

$$(1) \quad \begin{cases} x = X + \zeta a, \\ y = Y + \zeta b, \\ z = Z + \zeta c \end{cases}$$

les équations d'une surface réglée [S], dans lesquelles X, Y, Z sont les coordonnées rectangulaires du point central s de la génératrice rectiligne S, et a, b, c désignent les cosinus des angles que cette génératrice fait avec les axes positifs. Les quantités X, Y, Z; a, b, c sont des fonctions bien déterminées d'un paramètre t qui fixe la position de la génératrice dans l'espace, tandis qu'un second paramètre  $\zeta$ , indépendant du premier, détermine le point variable x, y, z sur cette génératrice. Ces six quantités satisfont, comme on sait, à l'équation différentielle suivante :

$$(2) \quad \frac{da}{dt} \frac{dX}{dt} + \frac{db}{dt} \frac{dY}{dt} + \frac{dc}{dt} \frac{dZ}{dt} = 0.$$

Pour trouver la courbure K de la surface au point (x, y, z), il faut calculer l'angle infiniment petit dt, que la génératrice S fait avec la génératrice S' infiniment voisine, ainsi que la plus courte distance dL de ces deux droites. En différentiant les équations (1) et posant

$$L = b \frac{dc}{dt} - c \frac{db}{dt}, \quad M = c \frac{da}{dt} - a \frac{dc}{dt}, \quad N = a \frac{db}{dt} - b \frac{da}{dt},$$

on obtient aisément

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{L \frac{dX}{dt} + M \frac{dY}{dt} + N \frac{dZ}{dt}}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{d\tau}{dt} = (L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}};$$

d'où l'on déduit, d'après une formule bien connue,

$$(3) \quad K = - \frac{\left(\frac{d\tau}{d\Delta}\right)^2}{\left[1 + \theta \left(\frac{d\tau}{d\Delta}\right)^2\right]^2},$$

ou, en appelant *courbure centrale* de la surface relative à la génératrice considérée la courbure  $K_s$  au point central  $s$ ,

$$(4) \quad K = \frac{K_s}{(1 - K_s \theta^2)^2}, \quad K_s = - \left(\frac{d\tau}{d\Delta}\right)^2 = - \frac{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 + \frac{dX}{dt} + M \frac{dY}{dt} + N \frac{dZ}{dt}\right)^2}.$$

Soit  $T$  la perpendiculaire commune aux droites  $S$  et  $S'$ , qui mesure la plus courte distance  $d\Delta$  : la surface  $[T]$ , engendrée par cette droite, a été nommée par E. Bour la *réciproque* de la proposée. En posant

$$(5) \quad a_1 = \frac{L}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad b_1 = \frac{M}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad c_1 = \frac{N}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on obtient les équations de la surface réciproque

$$(6) \quad \begin{cases} x = X + \theta_1 a_1, \\ y = Y + \theta_1 b_1, \\ z = Z + \theta_1 c_1. \end{cases}$$

La différentiation des équations (5) nous donne immédiatement

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{da_1}{dt} = \frac{P}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}} (bN - cM), \\ \frac{db_1}{dt} = \frac{P}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}} (cL - aN), \\ \frac{dc_1}{dt} = \frac{P}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}} (aM - bL). \end{cases}$$

où nous avons posé

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= a \left( \frac{db}{dt} \frac{d^2c}{dt^2} - \frac{dc}{dt} \frac{d^2b}{dt^2} \right) + b \left( \frac{dc}{dt} \frac{d^2a}{dt^2} - \frac{da}{dt} \frac{d^2c}{dt^2} \right) \\ &+ c \left( \frac{da}{dt} \frac{d^2b}{dt^2} - \frac{db}{dt} \frac{d^2a}{dt^2} \right); \end{aligned} \right.$$

d'où l'on conclut les expressions suivantes de l'angle infiniment petit  $d\tau_i$  de deux génératrices voisines de la surface réciproque et de leur plus courte distance  $d\Delta_i$ ,

$$(9) \quad \frac{d\tau_i}{dt} = \frac{P}{L^2 + M^2 + N^2},$$

$$(10) \quad \frac{d\Delta_i}{dt} = - \left( a \frac{dX}{dt} + b \frac{dY}{dt} + c \frac{dZ}{dt} \right).$$

La courbure centrale de la surface réciproque relative à la génératrice T, que nous désignons par  $k_i$ , est par conséquent

$$(11) \quad k_i = - \frac{P^2}{(L^2 + M^2 + N^2)^2 \left( a \frac{dX}{dt} + b \frac{dY}{dt} + c \frac{dZ}{dt} \right)}.$$

Désignons par  $ds$  l'élément de la ligne de striction commune à ces deux surfaces, et par  $d\sigma$  la projection orthogonale de cet élément sur la génératrice S, il viendra

$$\frac{d\sigma}{dt} = a \frac{dX}{dt} + b \frac{dY}{dt} + c \frac{dZ}{dt},$$

par conséquent

$$(12) \quad \frac{k_i}{K_i} = \frac{P^2}{(L^2 + M^2 + N^2)^2} \left( \frac{d\Delta}{d\sigma} \right)^2.$$

On peut transformer cette formule de la manière suivante :

Menons par l'origine des coordonnées le cône directeur de la surface [S] et décrivons de ce même point comme centre une sphère de rayon égal à l'unité de longueur, la sphère coupera le cône suivant une courbe que l'on peut nommer l'*indicatrice sphérique* de la surface proposée. Si l'on désigne par  $\frac{1}{\rho}$  la courbure de l'indicatrice au point  $(a, b, c)$  et par  $(a', b', c')$  les cosinus des angles que la perpendicu-

laire au plan osculateur de la courbe au même point fait avec les axes positifs, on obtient aisément

$$\frac{aa' + bb' + cc'}{\rho'} = \frac{P}{(L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}};$$

or l'expression  $\frac{aa' + bb' + cc'}{\rho'}$  est la courbure géodésique de l'indicatrice considérée sur la sphère, que nous appellerons  $\frac{1}{r}$ ; on a donc

$$(13) \quad P = \frac{1}{r} (L^2 + M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Pour transformer le quotient  $\frac{d\Delta}{d\sigma}$  dans l'équation (12), soit  $f$  l'angle moindre que 180 degrés que la tangente à la ligne de striction fait avec la direction positive de la génératrice  $S$ , on aura

$$\cos f = \frac{a \frac{dX}{dt} + b \frac{dY}{dt} + c \frac{dZ}{dt}}{\left[ \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dY}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dZ}{dt} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}};$$

d'où il suit, en ayant égard à l'équation (2),

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{ds}{dt} \sin f, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{ds}{dt} \cos f;$$

par conséquent,

$$(14) \quad \frac{d\Delta}{d\sigma} = \tan g f.$$

En substituant les expressions (13) et (14) dans l'équation (12), il viendra enfin

$$(15) \quad \frac{h_z}{K_z} = \frac{\tan g^2 f}{r^2}.$$

Cette formule permet de calculer la courbure centrale de la surface réciproque [T] en fonction de la courbure centrale de la proposée [S].

Désignons par  $f_i$  et  $r_i$  les valeurs de l'angle  $f$  et du rayon  $r$  relatives

à la surface [T], la formule précédente donnera

$$\frac{K_i}{k_i} = \frac{\tan^2 f_i}{r_i^2},$$

d'où l'on déduit

$$(16) \quad \frac{1}{r} \frac{r}{r_i} = \cot f \cot f_i.$$

C'est une remarquable relation symétrique entre les lignes de striction et les indicatrices sphériques de deux surfaces réciproques.

## II.

Nous allons montrer l'application de la formule (15) à la solution d'un problème intéressant de Cinématique des systèmes rigides.

On sait que tout mouvement bien déterminé d'un système rigide peut en général être engendré par le roulement et le glissement d'une surface réglée ( $\Sigma$ ), invariablement liée au système mobile, sur une autre surface réglée (S), immobile dans l'espace. Ces deux surfaces se touchent à chaque instant suivant une génératrice rectiligne qui est l'axe central du mouvement hélicoïdal infiniment petit du système. On peut appeler (S) la surface *centrale* et ( $\Sigma$ ) la surface *génératrice* du mouvement du système donné. La surface centrale peut être choisie à volonté; mais, pour que ( $\Sigma$ ) soit une surface génératrice correspondant à (S), il faut et il suffit que l'angle infiniment petit de deux génératrices consécutives de ( $\Sigma$ ) et leur plus courte distance soient respectivement égales aux éléments analogues de deux génératrices correspondantes de la surface centrale, en appelant *correspondantes* deux génératrices S et  $\Sigma$  de ces deux surfaces qui viennent coïncider simultanément avec l'axe central. On voit donc que ces deux surfaces ont la même courbure centrale aux génératrices correspondantes.

Pour trouver l'amplitude  $d\psi$  et la translation  $dl$  du mouvement hélicoïdal instantané relatif à l'axe central S, considérons deux génératrices correspondantes S' et S', infiniment voisines de S. Les lignes de striction de nos deux surfaces se coupent au point central  $s$  de la génératrice S, et le mouvement hélicoïdal doit amener la droite S' dans

une position telle qu'elle s'applique sur  $S'$ , et qu'en même temps le point central  $\sigma'$  de  $\Sigma'$  tombe sur le point central  $s'$  de  $S'$ . En menant donc par  $\sigma'$  la perpendiculaire commune  $\pi\sigma'$  à  $S$  et  $\Sigma'$  et par le point  $s'$  la perpendiculaire commune  $ps'$  à  $S$  et  $S'$ , on voit immédiatement que l'amplitude de la rotation est égale à l'angle des deux droites  $ps'$  et  $\pi\sigma'$ . Or  $ps'$  et  $\pi\sigma'$  sont deux génératrices correspondantes des surfaces (T) et ( $\tau$ ), réciproques de (S) et ( $\Sigma$ ); en désignant donc par  $d\psi'$  et  $d\psi''$  les angles infiniment petits que ces génératrices font avec la génératrice commune aux surfaces réciproques à l'instant considéré, on aura

$$(17) \quad d\psi = d\psi' \pm d\psi'',$$

le signe supérieur ou inférieur devant être choisi selon que les cônes directeurs des surfaces (S) et ( $\Sigma$ ) se touchent extérieurement ou intérieurement, suivant une droite parallèle à l'axe central.

La rotation  $d\psi$  amène la droite  $\Sigma'$  dans une position parallèle à  $S'$ , et la translation  $dl$  doit faire coïncider le point  $\sigma'$  avec  $s'$ ; on aura, par conséquent,

$$dl = \pi p = sp - s\pi,$$

ou, si l'on désigne par  $dl'$  et  $dl''$  les plus courtes distances  $sp$  et  $s\pi$  de la génératrice commune aux surfaces réciproques à la génératrice  $ps'$  et  $\pi\sigma'$  respectivement,

$$(18) \quad dl = dl' - dl''.$$

Le quotient  $\lambda = \frac{dl}{d\psi}$  est le *pas réduit* des hélices élémentaires décrites simultanément par les points du système mobile. Les formules précédentes nous donnent

$$\lambda = \frac{dl' - dl''}{d\psi' \pm d\psi''}.$$

En désignant par  $d\tau$  l'angle infiniment petit que la génératrice  $S'$  ou  $\Sigma'$  fait avec l'axe central, et par  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{1}{\rho}$  les courbures géodésiques des indicatrices sphériques des surfaces (S) et ( $\Sigma$ ) au point correspondant à

cet axe, nous aurons d'abord, en vertu des formules (9) et (13),

$$(19) \quad d\psi' = \frac{d\tau}{r}, \quad d\psi'' = \frac{d\tau}{\rho};$$

par conséquent,

$$(20) \quad \lambda = \frac{\frac{1}{r} \frac{dl'}{d\psi'} - \frac{1}{\rho} \frac{dl''}{d\psi''}}{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho}}.$$

Soit  $K_s$  la courbure centrale de (S) ou ( $\Sigma$ ) relative à l'axe central,  $f$  et  $\varphi$  les angles que les lignes de striction de ces deux surfaces font avec l'axe central, et  $k'_s, k''_s$  les courbures des surfaces réciproques (T) et ( $\bar{T}$ ) au point  $s$ ; on aura, d'après les formules données ci-dessus,

$$\frac{dl'}{d\psi'} = \frac{1}{\sqrt{-k'_s}}, \quad \frac{dl''}{d\psi''} = \frac{1}{\sqrt{-k''_s}},$$

$$k'_s = K_s \frac{\tan^2 f}{r^2}, \quad k''_s = K_s \frac{\tan^2 \varphi}{\rho^2};$$

d'où l'on conclut

$$(21) \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{-K_s}} \frac{\cot f - \cot \varphi}{\frac{1}{r} \pm \frac{1}{\rho}}.$$

Si les lignes de striction des surfaces centrale et génératrice se touchent au point  $s$ , on aura  $f = \varphi$ , par conséquent  $\lambda = 0$ ; le mouvement hélicoïdal se réduit alors à une simple rotation autour de l'axe central. Dans ce cas, la surface génératrice est applicable sur la surface centrale.

*Note sur le problème des trois corps;*

PAR M. ALLÉGRET,

Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon.

Dans les remarques critiques publiées dans le numéro de juillet du *Journal de Mathématiques* (t. III, p. 216), M. Émile Mathieu m'attribue une méthode toute différente de celle qui est exposée à la fin de mon Mémoire sur le problème des trois corps (*Journal de Mathématiques*, t. I, p. 277). Je regrette d'être obligé de me défendre d'avoir pris pour *intégrales*, ou comme des *quantités invariables avec le temps*, les sommes d'aires momentanées comptées dans les plans mobiles dont il est question au dernier Chapitre de ce Mémoire. Mais, si M. Mathieu veut prendre la peine de lire avec plus d'attention le n° 51 dudit Chapitre (p. 315), il reconnaîtra, je ne puis en douter, que l'opinion qu'il me prête est sans fondement. Les quantités désignées par C, F et G sont des constantes arbitraires par rapport aux variables de l'équation (45) où le temps n'entre pas, mais rien n'empêche de supposer aussi ces quantités C, F et G fonctions du temps. La solution S continue à convenir au problème des trois corps, pourvu seulement que la dérivée partielle de S par rapport au temps soit nulle. Or, si l'on remplace, par exemple, C, F et G par des fonctions qui satisfassent identiquement à la seconde ligne des équations (48'), savoir

$$\frac{\partial V}{\partial C} = \chi_0 - \chi, \quad \frac{\partial V}{\partial F} = \rho_0 - \rho, \quad \frac{\partial V}{\partial G} = \varpi_0 - \varpi,$$

et qu'ajoutant à S une constante convenable on mette cette dernière quantité sous la forme

$$S = C(\chi - \chi_0) + F(\rho - \rho_0) + G(\varpi - \varpi_0) + V,$$



on s'assure que  $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ .  $S$  est alors une solution de l'équation primordiale aux dérivées partielles, où les six variables  $s, \sigma, \omega, \gamma, \rho$  et  $\varpi$  sont indépendantes du temps ; par suite, la variabilité de  $C, F$  et  $G$ , que j'ai admise, est ainsi facilement justifiée.

J'ai dit d'ailleurs formellement que ces quantités  $C, F$  et  $G$  sont uniquement fonctions des trois angles  $\varphi, \psi$  et  $\nu$  qui déterminent à chaque instant dans l'espace la position variable du triangle des trois corps. Attribuer aux trois premières quantités une constance absolue reviendrait donc à supposer aussi la constance des trois derniers angles, ce qui est une absurdité manifeste. Enfin comment pourrait-on concilier l'opinion que me prête M. Mathieu avec ces paroles de mon Mémoire (*loc. cit.*) :

« Lorsque les éléments du triangle des trois corps seront connus au moyen de la solution singulière  $V$  et des trois premières équations (48), on devra faire varier les angles  $\varphi, \psi$  et  $\nu$  (c'est-à-dire évidemment déterminer leurs valeurs en fonction du temps), AINSI QUE LES FONCTIONS DÉSIGNÉES PAR  $C, F$  et  $G$ , etc. » ?

J'espère que M. Mathieu reconnaîtra qu'il s'est tout à fait trompé en me reprochant une aussi grossière erreur. Je vais maintenant examiner son objection relative à l'emploi des variables  $\gamma, \rho$  et  $\varpi$  qui n'auraient pas, selon lui, de véritables différentielles. Si mon contradicteur a voulu entendre par là que ces trois variables ne doivent pas être assimilées aux coordonnées ordinaires et susceptibles de déterminer dans l'espace la position des corps, il n'était pas besoin d'appuyer une assertion aussi évidente de l'autorité d'un fragment posthume et fort obscur de la deuxième édition de la *Mécanique analytique*. Je n'ai point prétendu le contraire ; je me suis contenté d'admettre implicitement (par suite des équations différentielles entre les variables considérées et de leurs intégrales correspondantes) qu'il existe entre les six coordonnées ordinaires du problème, les trois nouvelles variables auxiliaires  $\gamma, \rho$  et  $\varpi$ , et certaines constantes arbitraires, en nombre suffisant, des relations inconnues, mais possibles. J'ai pu dès lors penser, contrairement à l'opinion de M. Mathieu, que les formules relatives aux changements de variables indépendantes, et par suite aussi les transformations d'Hamilton et de Lagrange, inverses l'une de l'autre, subsistent encore,

sous la réserve toutefois que les constantes arbitraires dont il s'agit appartiennent à une même solution complète de l'équation fondamentale d'Hamilton. Ces relations inconnues ont pour effet de diminuer les constantes arbitraires de la solution complète, qui devient nécessairement par l'introduction des nouvelles variables  $\chi$ ,  $\rho$  et  $\varpi$ , une *solution singulière*. Cette remarque détruit toute l'argumentation de M. Mathieu, car la méthode visiblement erronée qu'il m'attribue ne conviendrait qu'à une solution complète, laquelle ne saurait ici être en question (*voir* notamment l'introduction et la fin du n° 52 de mon Mémoire). Mais, si M. Mathieu rejetait absolument l'emploi des variables  $\chi$ ,  $\rho$  et  $\varpi$  comme incompatible avec quelque solution singulière et convenable du problème, il commettrait lui-même une erreur très-grave. Qu'il veuille bien, en effet, se reporter à l'équation (45) qu'il incrimine, il verra que cette équation admet une solution immédiate, celle pour laquelle S est indépendante de  $\chi$ ,  $\rho$  et  $\varpi$ . On l'obtient en faisant  $\chi' = \rho' = \varpi' = 0$  et l'on retrouve la solution donnée par l'ensemble des équations (30) et (31) de mon Mémoire, laquelle est inattaquable. Ainsi, au point de vue des solutions singulières, qui sont ici tout aussi acceptables que les solutions complètes, l'emploi des variables  $\chi$ ,  $\rho$  et  $\varpi$ , que M. Mathieu condamne, est parfaitement légitime.

J'ajoute enfin, pour répondre à une assertion fort hasardée du commencement de sa Note, que le dernier Chapitre de mon Mémoire est loin d'avoir l'importance que mon contradicteur lui attribue.

Si l'on considère, en effet, que dans les deux Chapitres qui précèdent le dernier, il a été démontré l'existence d'une solution singulière de l'équation

$$U - T = H,$$

il devient aisé de reconnaître que cette solution s'étend au cas général, en rendant variable la quantité H supposée tout d'abord constante. Cette hypothèse ne fait que transformer la solution précédente en une nouvelle solution singulière qui convient encore au problème. Les quatre équations des aires et des forces vives permettent ensuite, par la méthode du n° 47, de former de nouvelles équations différentielles du premier ordre entre les quatre variables H,  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $\nu$  et par

l'intégration on aurait ensuite la solution la plus générale du problème des trois corps.

Je n'ai pas cru devoir m'arrêter, il est vrai, à l'exposition de cette méthode, qui se présentait d'elle-même comme une conséquence de ma théorie des solutions singulières et générales des équations aux dérivées partielles (voir *Journal de Mathématiques*, t. III, p. 259). Si j'ai préféré exprimer la variabilité de  $H$  en introduisant dans  $U$  quelques nouveaux termes, c'est afin de conserver à  $H$  la valeur de la constante absolue des forces vives. C'est là le but unique du dernier Chapitre de mon Mémoire. Mais, en supposant que la méthode qui y a été suivie soit défectueuse en quelque point, ce que j'ignore, il serait à coup sûr excessif et peut-être injuste de nier, à propos d'une question d'un intérêt théorique d'ordre secondaire, le pas fait vers la solution du problème des trois corps, en signalant pour la première fois une solution singulière qui ne dépend pas de la position des axes coordonnés. Cette solution mettrait assurément, si elle pouvait être obtenue, sur la voie du résultat définitif. C'est là, selon moi, contrairement encore à l'opinion de M. Mathieu, le point capital de mon Mémoire, et je crois l'avoir dit fort clairement et dans l'introduction et dans le cours même de mon travail. J'aurais été bien aise que M. Émile Mathieu eût constaté ce léger mais incontestable progrès, de même que je voudrais pouvoir reconnaître quelque chose de fondé dans ses observations. En essayant de nous éclairer mutuellement, nous pourrions toujours du moins, M. Mathieu et moi, montrer au public, dans une discussion courtoise, qu'il est possible de concilier les égards que se doivent deux collègues avec une recherche scrupuleuse de la vérité géométrique.

*ERRATA.*

Pages	Lignes	<i>Au lieu de</i>	<i>Lisez</i>
313,	1, 6 et 8 en remontant	$-\frac{d\varphi}{ds}$	$+\frac{d\varphi}{ds}$
"	10 "	$\varphi_0 - \left(\varphi + \frac{d\varphi}{ds}\right)$	$\varphi + \frac{d\varphi}{ds} ds - \varphi_0$
"	11 "	$\varphi_0 - \varphi$	$\varphi - \varphi_0$
314	4 et 6 "	$\frac{1}{h}$	$-\frac{1}{h}$
318	1 "	$+\frac{1}{EI_v \cos^2 i}$	$\frac{1}{EI_v \cos^2 i}$
318	2 en remontant	$+\frac{\tan^2 i}{2 EI_v}$	$-\frac{\tan^2 i}{2 EI_v}$
"	4 "	+	-
319	2 en descendant	-	-
"	3 "	$\frac{1}{EI_v \cos^2 i}$	$-\frac{1}{EI_v \cos^2 i}$

369 4 et 5, retablir la formule ainsi :

$$\begin{aligned}
 a_1 a_2 a_3 &= n^2 n'^2 - n''^2 \\
 &= \Sigma m^2 m' m'' (\mathfrak{I} MM')^2 + \Sigma mm' m'' m^2 (\mathfrak{I} M' M'')^2 \\
 &\quad + \Sigma mm' m'' (\mathfrak{S} MM' M'')^2.
 \end{aligned}$$

387 7, formule (62), enlever le signe  $\square$ .

---

---

# TABLE DES MATIÈRES.

TROISIÈME SÉRIE. — TOME III.

---

	Pages.
Mémoire sur les équations du mouvement d'un système de corps; par M. <i>Émile Mathieu</i> .....	5
Des formes quadratiques binaires et ternaires; par M. <i>Édouard Selling</i> ... 21 et	153
Sur le raccordement de deux alignements droits d'une ligne de chemin de fer horizontale; par M. <i>J. Collet</i> .....	61
Développements sur la question du mouvement d'un point matériel sur une surface; par M. <i>H. Resal</i> ... ..	79
Mémoire sur les lignes de faite et de thalweg, que l'on est conduit à considérer en topographie; par M. <i>Breton (de Champ)</i> .....	99
Recherches sur la poussée des terres et stabilité des murs de soutènement; par M. <i>H. Resal</i> .....	115
Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans se croisant sur un même point d'un corps, et sur celle des déformations qui se produisent autour d'un tel point; par M. <i>J. Boussinesq</i> .....	147
Extrait d'une Lettre à M. Resal; par M. <i>Ossian Bonnet</i> .....	207
Note sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, dans un cas particulier; par M. <i>C. Flye Sainte-Marie</i> .....	213
Sur le problème des trois corps; par M. <i>Émile Mathieu</i> .....	216
Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes; par M. <i>Maurice Levy</i> ... ..	219
De la déformation qu'éprouve une pièce à simple ou à double courbure sous l'action de forces qui lui font subir en même temps une flexion et une torsion.....	307

Extrait d'une Lettre à M. Resal; par M. <i>Breton (de Champ)</i> .....	323
Applications mécaniques du calcul des quaternions; par M. <i>Laisant</i> .....	325
Mouvement d'un point pesant sur un parabolôide; par M. <i>A. de Saint-Germain</i> .....	401
Sur la courbure des surfaces réciproques; par M. <i>Jean Franke</i> .....	415
Note sur le problème des trois corps; par M. <i>Allégret</i> .....	422
Errata .....	426

*PLANCHES.*

PLANCHE I. — Sur les formes quadratiques binaires et ternaires.

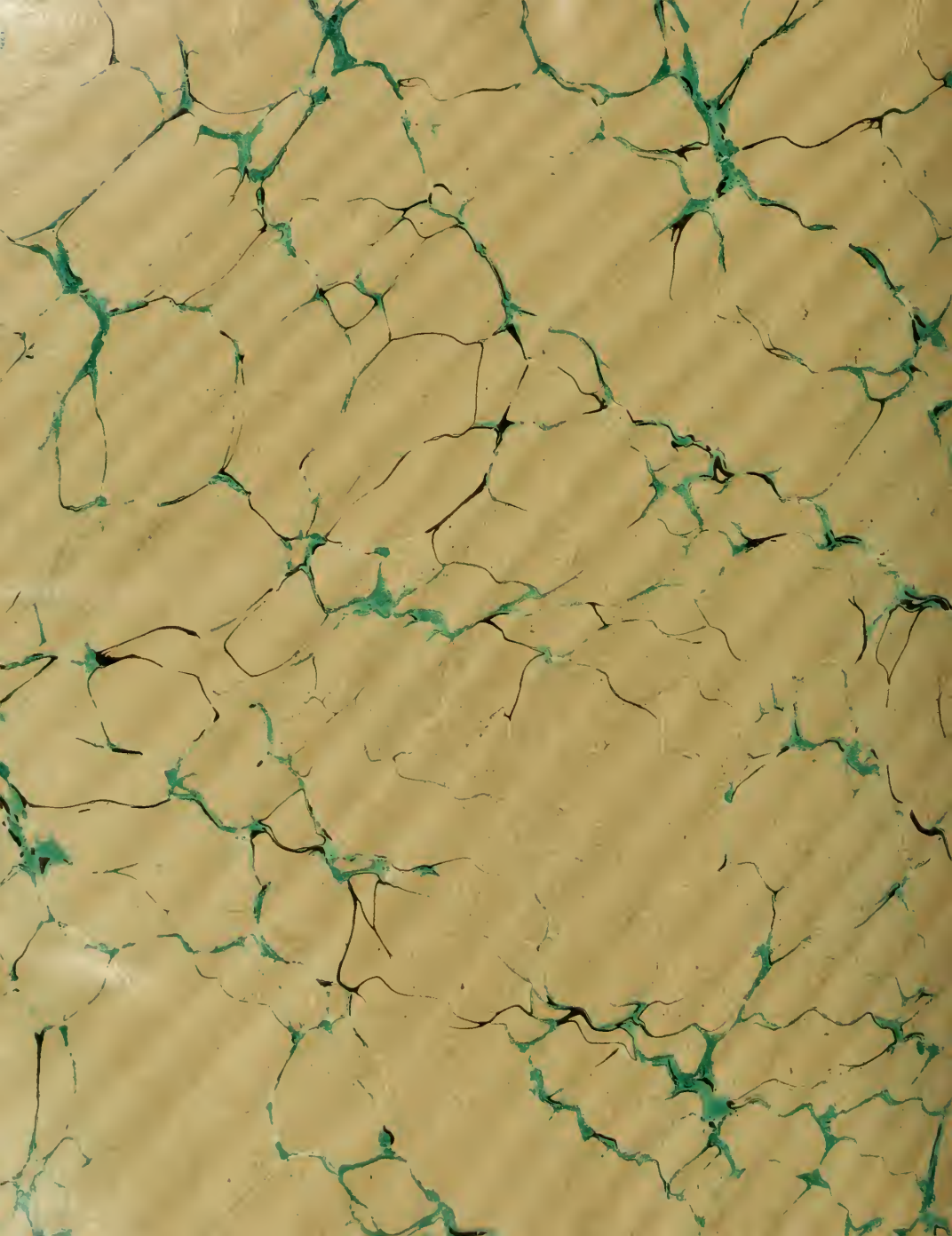
FIN DU TOME III DE LA TROISIÈME SÉRIE.











QA  
1  
J684  
sér.3  
t.3  
Physical &  
Applied Sci.  
Serials

Journal de mathématiques  
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE  
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

---

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

---

